Untersuchungen zur Erkenntnis des Gebirgsdrucks

Von der

TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRESLAU

zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs

genehmigte

DISSERTATION

Vorgelegt von

Bergingenieur Richard Fenner

aus Santiago (Chile)

Referent: o. Professor Dr.-Ing. G. Spackeler
Korreferent: o. Professor Dr.-Ing. L. Mann

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Mai 1938

Sonderabdruck aus den Heften 32 (S. 681/93) und 33 (S. 705/15) des Jahrgangs 1938
der Berg- und Hüttenmännischen Zeitschrift »Glückauf«.

Untersuchungen zur Erkenntnis des Gebirgsdrucks

Von der

TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BRESLAU

zur Erlangung der Würde
eines Doktor-Ingenieurs

genehmigte

DISSERTATION

Vorgelegt von

Bergingenieur Richard Fenner

aus Santiago (Chile)

Referent: o. Professor Dr.-Ing. G. Spackeler
Korreferent: o. Professor Dr.-Ing. L. Mann

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Mai 1938

1938
Verlag Glückauf G. m. b. H., Essen

Beobachtungen über die Auswirkungen des Gebirgsdrucks auf chilenischen Kohlengruben haben den Verfasser angeregt, nach den physikalischen Gesetzen dieser Erscheinungen zu forschen. Das Ergebnis dieser stillen zehnjährigen Arbeit wurde durch die Veröffentlichungen des Herrn Professor Dr. Spackeler sehr befruchtet. Der Verfasser ist ihm ferner außerordentlich zu Dank verpflichtet für die Anregung, seine Untersuchungen in der vorliegenden Fassung zu bringen und für die Förderung, die er seiner Arbeit in jeder Hinsicht hat zuteil werden lassen. Ferner haben die Herren Professoren Dr. Mann und Dr. Schmeidler durch ihr Entgegenkommen und ihren Rat die Arbeit wesentlich gefördert, so daß es dem Verfasser ein Bedürfnis ist, den drei genannten Herren zu danken.

Die zahlreichen Arbeiten, die bisher über den Gebirgsdruck erschienen sind, behandeln dieses Problem von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus. Einige Verfasser bauen ihre Arbeiten auf Beobachtungen und Erfahrungen auf, andere gehen von Berechnungen aus, die in enger Beziehung zum Hookeschen Gesetz stehen.

Das bergmännische Schrifttum enthält eine Fülle von Feststellungen und theoretischen Erläuterungen[1], die sich schwer einem gemeinsamen Gesichtspunkt unterordnen lassen. In der vorliegenden Arbeit, die sich ausschließlich mit den Druckerscheinungen um verhältnismäßig kleine Hohlräume (Strecken und Schächte)[2] beschäftigt, soll unbeschadet der wertvollen Ergebnisse, die der Beobachtung zu verdanken sind, der Versuch gemacht werden, auf der Grundlage der Elastizitäts- und bestimmt formulierter Plastizitätseigenschaften kennzeichnende Erscheinungen im Gebirge zu erklären und die Abhängigkeit der verschiedenen in Betracht kommenden Faktoren gesetzmäßig zu erfassen.

Selbstverständlich ist die Lösung dieser Aufgabe nur bei Idealisierung des behandelten Mediums möglich, da die aufgestellten Beziehungen Stetigkeit voraussetzen, was nur bei vollständiger Homogenität des Mediums und des ursprünglichen Spannungszustandes der Fall ist. Anderseits muß Isotropie und strenge Geltung des Hookeschen Gesetzes unterhalb der Fließgrenze verlangt werden, was in der Natur nur näherungsweise anzunehmen ist. Oberhalb der Fließgrenze ist vorauszusetzen, daß die aufgestellte Plastizitätsbedingung volle Gültigkeit hat und daß nach genügend langer Zeit, die ausschließlich durch die Raumdehnung des Mediums bedingt wird, der in Betracht kommende Grenzzustand erreicht ist, weil sonst die mathematische Lösung der Aufgabe nicht eindeutig bestimmt wäre. Diese Bedingung wird bekanntlich im Abbau nicht erfüllt, weil die Fließbewegung geringere Geschwindigkeit als diejenige des Abbaus aufweist, ein Umstand, der es zweckmäßig erscheinen läßt, die durch den Abbau entstehenden großen Räume zunächst nicht zu behandeln, obwohl sie denselben Gesetzen unterworfen sind.

Spannungszustand im ungestörten Gebirge.

Spannungszustand im elastischen Medium.

Das ungestörte Gebirge sei in der Weise definiert, daß die größere der beiden Hauptspannungen mit der Vertikalrichtung zusammenfällt und durch die Gleichung

$$p_z = \gamma h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

gekennzeichnet wird, worin bedeuten p_z den vertikalen Druck, γ das spezifische Gewicht des Gesteins und h die Tiefe des Ortes, dessen Spannungszustand untersucht werden soll. (Druckspannungen positiv.)

Da der seitliche Druck die in Richtung der OX- und der OY-Achse wirkenden Formänderungen verhindert, lassen sich unmittelbar die parallel zur X-, Y- und Z-Achse gerichteten Dehnungen durch die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} = \dfrac{\partial\xi}{\partial y} = \dfrac{\partial\xi}{\partial z} = \dfrac{\partial\eta}{\partial x} = \dfrac{\partial\eta}{\partial y} = \dfrac{\partial\eta}{\partial z} = \dfrac{\partial\zeta}{\partial x} = \dfrac{\partial\zeta}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial z} \text{ ist nicht gleich } 0 \end{array}\right\} \quad 2$$

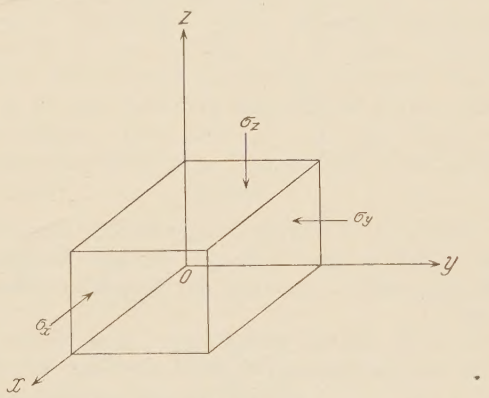

Abb. 1.

zum Ausdruck bringen (Abb. 1). Da nun nach den Gesetzen der Elastizitätstheorie[1] die Hauptspannungen den Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_x = 2G\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \dfrac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_y = 2G\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_z = 2G\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} + \dfrac{e}{m-2}\right) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 3$$

genügen, worin G den Schubelastizitätsmodul, e die Raumdehnung und m die Poissonsche Konstante bedeuten, so lassen sich nach Einsetzen der Bedingung 2 in die Gleichung 3 die Werte der drei Hauptspannungen bestimmen. Diese lauten, wenn man $\sigma_z = p$ setzt,

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{p}{m-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4.$$

[1] Vgl. z. B. Haack, Glückauf 64 (1928) S. 711. Gillitzer, Glückauf 64 (1928) S. 977. Langecker, Glückauf 64 (1928) S. 1409. Spackeler, Glückauf 64 (1928) S. 873; 65 (1929) S. 461 und 1753; 66 (1930) S. 757. Kühn, Glückauf 67 (1931) S. 1033 und 1477; 68 (1932) S. 185; 69 (1933) S. 560; Lenk: Der Ausgleich des Gebirgsdrucks in großen Teufen, Berlin 1931. Gremmler: Messungen und Beobachtungen des Gebirgsdrucks am Ausbau von Ausrichtungsstrecken, Glückauf 69 (1933) S. 417.

[2] Das Schrifttum über die zahlreichen Beobachtungen und Messungen an der Oberfläche wird hier nicht angegeben, weil es sich dabei um große Hohlräume handelt.

[1] Föppl, Bd. 3 und 5.

Unter Zugrundelegung der für die Schubspannungen geltenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}=\tau_{yx}&=G\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\\ \tau_{xz}=\tau_{zx}&=G\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\\ \tau_{yz}=\tau_{zy}&=G\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 5$$

ergeben sich ohne weiteres die Gleichungen:

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\tau_{xz}=\tau_{zx}=\tau_{yz}=\tau_{zy}=0,$$

die beweisen, daß die drei Spannungen Hauptspannungen sind.

Unter Hinweis auf den in Abb. 2 dargestellten ebenen Spannungszustand gelangt man nach Projektion der Kräfte zu den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x\sin\varphi&=n\sin\varphi-\tau\cos\varphi\\ \sigma_z\cos\varphi&=n\cos\varphi+\tau\sin\varphi\end{aligned}\right\} \quad \ldots 6.$$

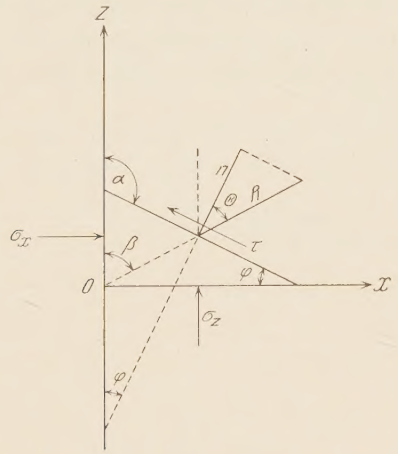

Abb. 2.

Diese drücken aus, daß die beiden Komponenten $x=\sigma_x\sin\varphi$ und $z=\sigma_z\cos\varphi$ der Resultierenden R der Formel

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{z^2}{\sigma_z^2}=1 \quad \ldots\ldots 7$$

genügen, oder, da beim dreidimensionalen Spannungszustand der OY-Achse derselbe Wert zukommt wie der OX-Achse, also $\sigma_x=\sigma_y$ ist, der Formel:

$$\frac{x^2+y^2}{\sigma_x^2}+\frac{z^2}{\sigma_z^2}=1 \quad \ldots\ldots 8,$$

d. h. das Spannungsellipsoid ist ein Rotationsellipsoid mit den Achsen

$$\sigma_z=p;\ \sigma_x=\frac{p}{m-1};\ \sigma_y=\frac{p}{m-1}.$$

Diese Gleichungen gelten, solange die Schubspannungen die dem betreffenden Gestein entsprechende Proportionalitätsgrenze nicht überschreiten.

Aus praktischen Gründen soll der Spannungszustand in Polarkoordinaten dargestellt werden. Es seien (Abb. 3) σ_t und σ_r die Normalspannungen in der Richtung der Tangente bzw. in Richtung des Radius und τ die Schubspannung. Ein Blick auf Abb. 2 zeigt, daß der Winkel φ in Abb. 3 demjenigen in Abb. 2 entspricht, den die Normalspannung mit der OZ-Achse bildet. Unter Benutzung der Gleichungen 6 und mit Berücksichtigung der Werte $\sigma_x=\frac{p}{m-1}$ und $\sigma_z=p$ gelangt man zu den Formeln:

$$\left.\begin{aligned}n=\sigma_r&=\frac{p}{m-1}\sin^2\varphi+p\cos^2\varphi\\ \tau&=\left(p-\frac{p}{m-1}\right)\sin\varphi\cos\varphi\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 9,$$

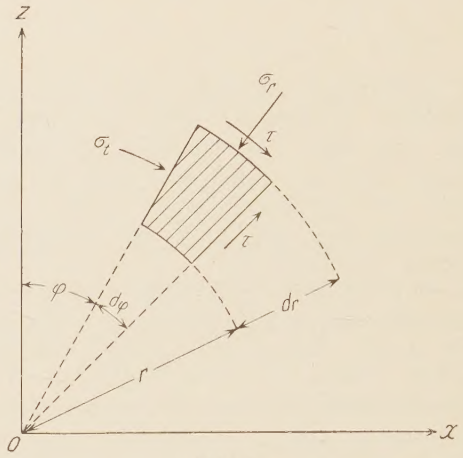

Abb. 3.

aus denen man nach Einführung des doppelten Winkels φ und unter Berücksichtigung der Richtung der Spannungen σ_t und τ ohne weiteres die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{p}{2(m-1)}[m+(m-2)\cos 2\varphi]\\ \sigma_t&=\frac{p}{2(m-1)}[m-(m-2)\cos 2\varphi]\\ \tau&=-\frac{p(m-2)}{2(m-1)}\sin 2\varphi\end{aligned}\right\} \quad \ldots 10$$

ableiten kann, die den Wert der Spannungen in einer beliebigen Richtung angeben.

Haben die beiden Hauptspannungen denselben Wert, so nehmen die Gleichungen 9 die Form:

$$\sigma_r=\sigma_t=p,\ \tau=0 \quad \ldots\ldots 11$$

an, womit ausgedrückt wird, daß jede beliebige Richtung eine Hauptrichtung, der Wert der Hauptspannung gleich p und der Wert der Schubspannung gleich Null ist.

Diese Werte erklären auch das Verhalten von Gesteinswürfeln, die man bei Laboratoriumsversuchen gleichem, allseitigen Druck aussetzt. Da keine Schubspannungen auftreten, können sie nicht zertrümmert werden.

Spannungszustand im plastischen Medium.

Um die oben entwickelten Formeln sinngemäß für plastische Medien zu verallgemeinern, ist es zweckmäßig, sie mit Hilfe des Mohrschen Kreises schaubildlich darzustellen[1].

Bezeichnet man mit σ_1 und σ_2 die beiden Hauptspannungen, so daß

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=m-1 \quad \ldots\ldots 12$$

ist, mit σ_n und τ die Normal- und die Schubspannung,

[1] Nádai, Handbuch der Physik, Bd. 6, Kap. 6, Plastizität und Erddruck.

welche die Richtung φ mit der OZ-Achse bilden (Abb. 2), so kann man mit Hilfe der Abb. 4 folgende Gleichungen aufstellen:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\varphi \\ \tau &= \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\varphi\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; 13.$$

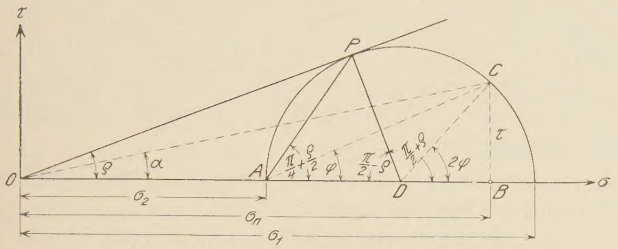

Abb. 4.

Diese Gleichungen stimmen mit den Gleichungen 9 überein, wenn man in 9 für p und $\frac{p}{m-1}$ die Werte σ_1 und σ_2 setzt und statt von φ die Funktionen des doppelten Winkels einführt. Damit ist bewiesen, daß in Abb. 4 die Abszisse OB die Normalspannung und die Ordinate BC die Schubspannung wiedergibt.

Der Winkel $BAC = \varphi$ stellt, wie bereits erwähnt, die Richtung der betrachteten Spannung σ mit der Richtung OZ oder, was dasselbe ist, die Richtung der größern Hauptspannung mit einer beliebigen, im Raume festgelegten Richtung dar. Aus derselben Abbildung ist zu ersehen, daß der Höchstwert der Schubspannung bei $\varphi = 45^0$ auftritt, was schon aus der zweiten Formel der Gruppe 13 hervorging. Anderseits ersieht man ebenfalls aus Abb. 4, daß der Höchstwert des Quotienten

$$\operatorname{tg}\rho = \frac{\tau}{\sigma_n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 14$$

in dem Berührungspunkte P des von O tangential zum Mohrschen Kreise gezogenen Strahles OP zu suchen ist, so daß man für diesen Wert von α die Beziehung

$$\sin\rho = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$$

schreiben kann, oder auch

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1+\sin\rho}{1-\sin\rho} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 15.$$

Denkt man sich in einer sandartigen lockern Masse einen Schnitt geführt und an den beiden angrenzenden Teilen angreifende Kräfte, die eine relative Verschiebung längs des gedachten Schnittes zu verursachen trachten, so wird in der Fläche eine gewisse Reibungskraft auftreten, die gemäß der Erfahrung im Augenblick des Bewegungsbeginns proportional dem auf der Gleitfläche lastenden Druck angenommen werden darf.

Bezeichnet man mit μ die Proportionalitätskonstante zwischen dem lastenden Druck σ_n und der auf die Flächeneinheit bezogenen Reibungskraft oder Schubspannung τ_n (die Zeiger n deuten die Richtung der äußern Normale des betrachteten Körperteiles an), so erhält man für den Grenzzustand die Formal

$$\tau_n = \mu\,\sigma_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 16.$$

Bezeichnet man jetzt mit ρ den natürlichen Böschungswinkel (Reibungswinkel), so kann man sofort erkennen, daß die Formeln 14 und 16 übereinstimmen, wenn

$$\mu = \operatorname{tg}\rho \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 17$$

gesetzt wird, so daß die Formel 15 den Höchstwert des Quotienten der beiden Hauptspannungen darstellt.

Somit würde in einem beliebigen Punkte im Innern einer sandartigen lockern Maße der Spannungszustand durch Formel 15 definiert, wie aus folgender Überlegung hervorgeht. Der Wert der senkrechten Hauptspannung wird durch die Last der oberhalb des betrachteten Punktes liegenden Masse dargestellt, also bei horizontaler Oberfläche durch Formel 1. Die waagrechte Hauptspannung wird, wenn die Reibungszahl unendlich groß ist, durch die Beziehung 4 bestimmt. Ist die Reibungszahl endlich, so kommt folgende Ungleichung in Betracht:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1+\sin\rho}{1-\sin\rho} \lessgtr m-1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 18.$$

Gilt das oberste Zeichen, so besitzt τ einen höhern als den durch die Formel 16 festgelegten Wert. Die einzelnen Körnchen müssen sich deshalb längs Gleitflächen, die den Winkel $\frac{\pi}{2}-\rho$ miteinander bilden (Winkel ODP im Mohrschen Kreis), bewegen, bis der durch Formel 15 gegebene Wert erreicht wird. Gilt das unterste Zeichen, so ist der Wert von τ unbestimmt und Gleichung 16 verwandelt sich in die Ungleichung

$$\tau_n < \mu\,\sigma_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 19.$$

Bedenkt man nun, daß für den Bergmann Medien in Betracht kommen, deren Reibungskoeffizienten zwischen 20^0 (Tone, Letten) und 40^0 (Sand, Schotter) und deren Poissonsche Konstante zwischen 4 und 7 liegen, so kommt man zum Schluß, daß nur in seltenen Ausnahmefällen ($\rho > 37^0$, $m < 5$) die waagrechte Hauptspannung durch die Poissonsche Konstante bestimmt wird.

Setzt man Gleichung 18 gleich K–1, wobei

$$K = \frac{2}{1-\sin\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 20$$

ist, so erhält man, wenn man diesen Wert in die Formeln 10 einführt, den Spannungszustand im ungestörten kohäsionslosen Gebirge:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{p}{2(K-1)}\left[K+(K-2)\cos 2\varphi\right] \\ \sigma_t &= \frac{p}{2(K-1)}\left[K-(K-2)\cos 2\varphi\right] \\ \tau &= -\frac{p}{2}\frac{K-2}{K-1}\sin 2\varphi\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; 21$$

(p senkrechte Hauptspannung).

Führt man in die Formel 18 den Wert μ des Reibungswinkels ein, so erhält man für den Quotienten der Hauptspannungen die Formel

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(\mu+\sqrt{1+\mu^2}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 22.$$

Nun muß man bedenken, daß die gemachte Annahme (kohäsionsloser Sand) in den seltensten Fällen mit den Eigenschaften der für den Bergmann in Betracht kommenden Gesteine übereinstimmen wird, da diese, abgesehen von Tonen, Letten und Sand, eine beträchtliche Kohäsion besitzen und somit einen

Schubspannungswiderstand bei einachsigem Spannungszustand aufweisen, der nicht vernachlässigt werden darf.

Im allgemeinsten Falle werden die Umhüllenden der Spannungskreise (Abb. 5), wie zuerst Prandtl[1] betont hat, durch eine von den Eigenschaften des Mediums abhängige Kurve $\tau = f(\sigma)$ dargestellt.

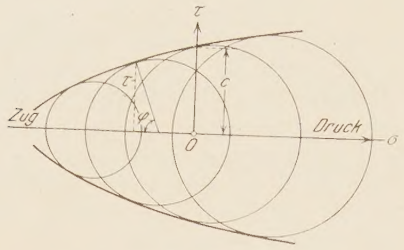

Abb. 5.

Bei den für den Bergmann in Betracht kommenden Medien (spröde plutonische, effusive und sedimentäre Gesteine) nimmt, wie die Erfahrung lehrt, die Schubspannung mit dem Druck zu, so daß mit einer für den verfolgten Zweck genügenden Genauigkeit eine geradlinige Grenzkurve angenommen werden darf. Für diesen Fall kann man, wie aus Abb. 6 zu ersehen ist, in der die Strecke $OA = c$ die Fließgrenze beim ebenen Spannungszustand darstellt (eine der drei Normalspannungen gleich Null), folgende Beziehungen aufstellen:

$$\tau_n = c + \sigma_n \operatorname{tg} \rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 23,$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = (\sigma_o + c_1) \sin \rho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 24.$$

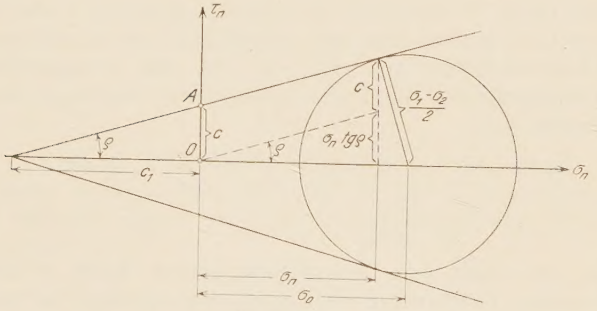

Abb. 6.

Anderseits besteht zwischen den Hauptspannungen beim Grenzfall folgende Beziehung

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \cdot \sin \rho + c_1 \sin \rho \quad . \quad . \quad . \quad 25.$$

Führt man, um die Formeln zu vereinfachen, den Wert

$$\sigma = \sigma_o + c_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 26$$

ein, so erhält man

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \sigma - c_1.$$

Diese Beziehungen erlauben es, einfache Formeln sinngemäß für den Spannungszustand im ungestörten Gebirge bei großen Teufen aufzustellen. Sie lauten:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma (1 + \sin \rho \cos 2\varphi) - c_1 \\ \sigma_t &= \sigma (1 - \sin \rho \cos 2\varphi) - c_1 \\ \tau &= \sigma \sin \rho \sin 2\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 27.$$

[1] Z. angew. Math. u. Mech. 1 (1921) S. 15.

Im gestörten Gebirge (die größere Hauptspannung besitzt eine beliebige Richtung in bezug auf OZ) gelten:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma (1 + \sin \rho \cos 2\varphi) - c_1 \\ \sigma_x &= \sigma (1 - \sin \rho \cos 2\varphi) - c_1 \\ \tau &= \sigma \sin \rho \sin 2\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 28.$$

Da c_1 die Kohäsionszahl ist, kann man in sehr großen Teufen die einfachern Gleichungen 23 für die Darstellung des Spannungszustandes wählen, weil dann c_1 im Vergleich zu σ vernachlässigt werden darf.

Um den Geltungsbereich der drei Formelgruppen 10, 21 und 27 zu bestimmen, betrachte man folgende drei Beispiele:

1. Plutonische, vulkanische und sehr feste Gesteine (Granit, Basalt, Gneis usw.):

$$\tau \sim 200 \text{ kg/cm}^2,\ \gamma \sim 2{,}7,\ m \sim 5,\ \mu \sim 0{,}75.$$

Aus der dritten Formel der Gruppe 10 kann man die Teufe bestimmen, bei der die Bruchschubspannung erreicht wird ($\varphi = 45^0$)

$$200\,000 = 2{,}7\ h \cdot \frac{3}{8} = \frac{8{,}1}{8}\ h.$$

Somit wird $h = 1975$ m ~ 2000 m. Man sieht sofort, daß für bergmännische Teufen für diese Gesteine ausschließlich die Formeln 10 in Betracht kommen können, und somit muß man sämtliche Berechnungen mit Hilfe der Elastizitätstheorie zu lösen versuchen.

2. Mittelfeste Sandsteine:

$$\tau \sim 40 \text{ kg/cm}^2,\ \gamma \sim 2,\ m \sim 5,\ \mu \sim 0{,}7.$$

Bei einer Teufe von 533 m wird die Schubfestigkeitsgrenze bei den um 45^0 gegen die Horizontale geneigten Ebenen erreicht. Der Sandstein befindet sich somit in teilweise plastischem Zustande, weil der Reibungswiderstand auf derselben Ebene ($\varphi = 45^0$; s. dritte Formel der Gruppe 27) gleich 68 kg/cm² ist ($\sigma = 66{,}7 + c_1 = 120$ kg/cm², $\tau = 120 \cdot 0{,}57 = 68$ kg/cm²), so daß kein Gleiten eintreten kann.

Um die Teufe zu bestimmen, bei der ausschließlich die Formeln 27 gelten, bedenke man, daß die Gleitflächen für den angenommenen Reibungskoeffizienten einen Winkel von $27^0\ 30' \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right)$ mit der Senkrechten bilden, so daß der Reibungswiderstand für obige Teufe gleich

$$\tau = 120 \cdot 0{,}57 \cdot 0{,}82 = 56 \text{ kg/cm}^2$$

ist. Erst bei 1200 m wird der Spannungszustand durch die Formeln 27 bei den angenommenen Zahlen dargestellt.

Tritt eine Störung im Gebirge ein (Bohrung eines Schachtes oder Stollens), so wird eine der betrachteten zwei Hauptspannungen gleich Null (die dritte übt keinen Einfluß aus), und die Fließgrenze des Gesteins sinkt auf 40 kg/cm². In diesem Falle gelten die Formeln 27 schon bei der oben angegebenen Teufe von 533 m.

Zusammenfassend kann man sagen, daß bei der Berechnung von Spannungszuständen in milden Gesteinen die Fließgrenze, je nach dem Werte der kleinsten Hauptspannung, der Schubspannung, der Poissonschen Konstanten und des Reibungskoeffizienten, zwischen 500 und 1200 m Tiefe zu suchen ist.

3. Tone, Letten, Mergel ($\tau \sim 1$ kg/cm², $\mu = 0{,}36$, $m \sim 5$, $\gamma \sim 2$). Bei diesen Gesteinen ist die Fließgrenze schon bei wenigen Metern Tiefe erreicht, so daß für

bergmännische Teufen ausschließlich die Formeln 21 in Betracht kommen.

Spannungszustand im gestörten elastischen Gebirge.

Spannungszustand um einen Hohlraum mit kreisförmigem Querschnitt.

Man gehe davon aus, daß in einem Gebirge, das im Verhältnis zu den Abmessungen des Hohlraums als unendlich angesprochen werden kann, ein kreisrunder Tunnel gebohrt worden ist und stelle sich eine Scheibe vor, die normal zur Achse des waagrechten Tunnels, und zwar von beiden Tunnelenden weit entfernt, liegt. Es leuchtet ohne weiteres ein, daß die Spannungskomponenten, die sich aus den Gleichungen 10 und 27 ergeben, in der Nähe des Tunnels eine grundlegende Änderung erfahren, da das Gestein unmittelbar, nachdem der Tunnel gebohrt worden ist, das Bestreben hat, den entstandenen Hohlraum auszufüllen.

Da die Verschiebungen in der Richtung der Tunnelachse durch die anstehenden Gebirgsmassen verhindert werden, kann man sich zur Lösung dieser Aufgabe nach den Lehren der Elastizitätstheorie[1] der Formeln der Scheibe bedienen. Diese lauten, in rechtwinkligen Koordinaten:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=0 \quad \ldots \quad 29,$$

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2};\ \sigma_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2};\ \tau=c-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \quad \ldots \quad 30.$$

Dieselben Gleichungen lauten in Polarkoordinaten (Abb. 7) oder, besser gesagt, in zylindrischen Koordinaten, da die Spannung in Richtung der OZ-Achse nicht gleich Null ist:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)=0 \quad \ldots \quad 31,$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r};\ \sigma_t=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\\ \sigma_z&=\frac{1}{m}(\sigma_r+\sigma_t);\ \tau=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 32.$$

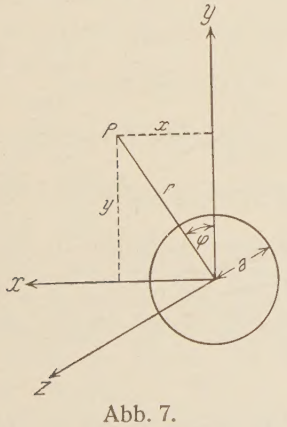

Abb. 7.

Die Funktion F, die bekanntlich Airysche Spannungsfunktion genannt wird, ist zuerst von Föppl für den Fall eines kreisrunden Loches angegeben worden[2]. Sie lautet, wenn die Hauptspannungen im Unendlichen den Wert p und $\frac{p}{m-1}$ haben, wie folgt:

$$F=\frac{p}{4}\frac{m}{m-1}(r^2-2a^2\ln r)-\frac{p}{4}\frac{m-2}{m-1}\frac{(r^2-a^2)^2}{r^2}\cos 2\varphi \quad \ldots \quad 33.$$

Aus den Gleichungen 32 erhält man die Werte der Spannungskomponenten, die, mit Ausnahme von σ_z, dem Werte der Hauptspannung in Richtung der OZ-Achse, entsprechend Abb. 3 bezeichnet sind.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{p}{2}\frac{m}{m-1}\frac{r^2-a^2}{r^2}+\frac{p}{2}\frac{m-2}{m-1}\left(1-\frac{4a^2}{r^2}+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi\\ \sigma_t&=\frac{p}{2}\frac{m}{m-1}\frac{r^2+a^2}{r^2}-\frac{p}{2}\frac{m-2}{m-1}\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi\\ \tau&=\frac{p}{2}\frac{m-2}{m-1}\left(-1-\frac{2a^2}{r^2}+\frac{3a^4}{r^4}\right)\sin 2\varphi\\ \sigma_z&=\frac{p}{m-1}-\frac{p}{m}\frac{m-2}{m-1}\frac{2a^2}{r^2}\cos 2\varphi\end{aligned}\right\} \quad 34.$$

Durch Differentiation kann man sich davon überzeugen, daß die Gleichung 33 die durch die Gleichung 31 ausgedrückte Bedingung erfüllt, und daß die Gleichungen 32 den Grenzbedingungen für $r=a$:

$$\sigma_r=0;\ \tau=0,$$

und für $r\to\infty$:

$$\sigma_r=\frac{p}{2(m-1)}[m+(m-2)\cos 2\varphi]$$

$$\sigma_t=\frac{p}{2(m-1)}[m-(m-2)\cos 2\varphi]$$

$$\tau=-\frac{p}{2}\frac{m-2}{m-1}\sin 2\varphi$$

ebenfalls genügen.

Mit Hilfe der bekannten Gleichung:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}}=\frac{\sigma_r+\sigma_t}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2+(\sigma_r-\sigma_t)^2} \quad \ldots \quad 35$$

sind in Abb. 8 die Hauptspannungen um einen zylindrischen Hohlraum, dessen Form einem Kreis entspricht, schaubildlich zusammengestellt worden.

Ein Blick auf Abb. 8 überzeugt den Leser ohne weiteres, daß die Zugspannungen, die den Höchstwert 0,25 p am Rande des kreisrunden Hohlraums erreichen, das Gestein in nicht zu geringen Teufen zertrümmern, so daß notwendigerweise Brüche im Hangenden entstehen müssen. Für $\varphi=n\pi$ treten die Zugspannungen innerhalb der Grenzen

$$r=a \text{ und } r=\pm\frac{a}{2}\sqrt{\pm\sqrt{m^2+24m-48}-m}$$

auf, so daß im zertrümmerten Gestein die Gleichungen in Wirklichkeit gar keinen Wert haben. Anderseits hat die Schubspannung für

$$\varphi=\frac{\pi}{4}+n\frac{\pi}{2} \text{ und } r=\pm a\sqrt{3}$$

den Wert

$$\tau_{max}=-\frac{2}{3}p\frac{m-2}{m-1},$$

d. h. sie ist größer als die größte Schubspannung im Unendlichen.

Diese Betrachtungen führen zu dem Schluß, daß die entwickelten Formeln nur bei Mitteln, die hohen Zugspannungen widerstehen, von praktischem Wert

[1] Föppl, a. a. O.

[2] Durch Superposition aus der Spannungsfunktion von Kirsch, Z. VDI 42 (1898) S. 797, entstanden.

sein können, nicht aber für die in Frage kommenden Medien, die durchweg von tektonischen Kräften beeinflußt worden sind und somit die Eigenschaft, Zugspannungen zu widerstehen, fast verloren haben.

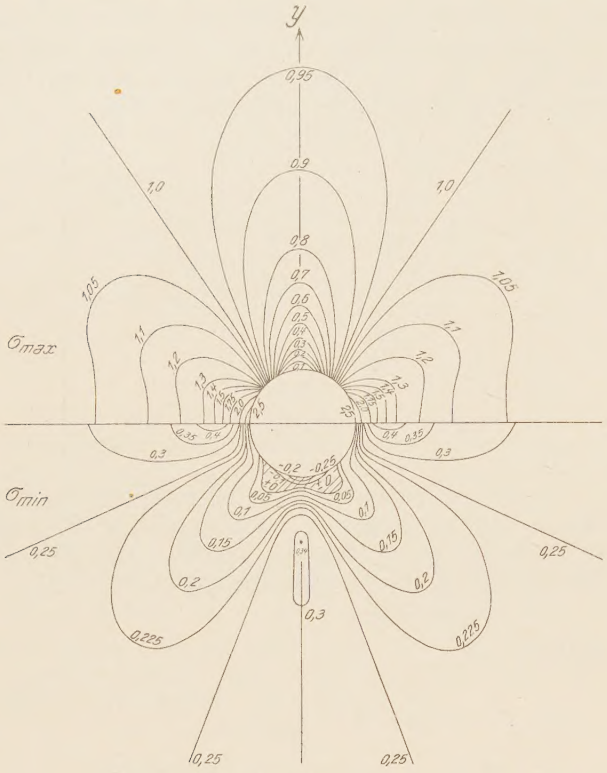

Abb. 8.

Wie aus der Arbeit von Kühn[1] zu entnehmen ist, sollen sich im Gestein um einen Hohlraum Risse bilden, die dasselbe entspannen, dafür jedoch in entferntern Zonen neue Spannungen erzeugen, welche neue Risse bilden, so daß eigentlich ein Ende des Wechsels zwischen Bildung neuer Spannungszustände und darauf folgendem Bruch im Gebirge gar nicht abzusehen ist. Da die Beobachtung dieser Behauptung entgegensteht, beruft sich Kühn auf den Faktor Zeit und kommt zu dem Schluß, daß, da die Gleichungen diesen Faktor nicht enthalten, schließlich in Übereinstimmung mit der Erfahrung doch Gleichgewicht eintreten muß.

Selbstverständlich spielt dieser Faktor Zeit keine Rolle, solange sich der Spannungszustand in elastischen Medien unterhalb der Elastizitätsgrenze und in plastischen Medien unterhalb des kritischen Reibungswiderstandes hält, weil sich die Gleichungen auf den Zustand der Ruhe beziehen, wohingegen die Zeit, sobald das Medium anfängt zu fließen, notwendigerweise ein Faktor der Geschwindigkeit wird.

Anderseits kam es Kühn, wie er ausführt, nur darauf an, zu beweisen, ... »daß in der Entwicklung der Willman-Kommerellschen Theorie von der Entstehung einer spannungslosen Zone, die den Ausgangspunkt vieler Erklärungen und Besprechungen von Gebirgsdruckerscheinungen bildet, ein Denkfehler enthalten ist«. Bedenkt man, daß die erhöhte Spannung an den Rändern des Hohlraums im elastischen Gebirge schon lange vor der Veröffentlichung Kühns bekannt war[2] und daß die angenommene Form der spannungsfreien Zone nahezu mit der Form übereinstimmt, welche die mathematische Analyse gibt, so kommt man zu dem Schluß, daß der von Kühn festgestellte Denkfehler eigentlich nicht von den Vorgängern, die sich mit diesem Problem befaßt haben, begangen worden ist. Im Gegensatz zu Kühns Behauptung, daß sich . . . . »über Form und Ausdehnung der Bruchzonen kaum theoretisch-rechnerische Betrachtungen anstellen lassen«, soll bewiesen werden, daß es, um zu fehlerfreien Ergebnissen zu gelangen, genügt, den Spannungszustand um einen Hohlraum mit veränderlichem Querschnitt zu untersuchen und auf diese Weise den Querschnitt zu bestimmen, der den naturgegebenen Anforderungen entspricht.

Spannungszustand um einen Hohlraum mit elliptischem Querschnitt.

Die Betrachtung gehe davon aus, daß in einem ungestörten Gebirge, dessen Spannungen durch die Gleichungen 10 gekennzeichnet sind, ein elliptischer Tunnel gebohrt wird, und zwar in der Weise, daß die Hauptachse des elliptischen Querschnitts mit der Hauptachse der Spannungsellipse zusammenfällt, so daß der Quotient der Achsen dieser beiden Ellipsen denselben Wert $m-1$ hat. In diesem Fall sind für die Berechnung der Spannungskomponenten wegen der Grenzbedingungen naturgemäß elliptische Koordinaten einzuführen:

$$y + ix = c\,\mathfrak{Cof}\,(\xi + i\eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 36.$$

Nach den Gesetzen über komplexe Zahlen erhält man:

$$\left.\begin{aligned} y &= c\,\mathfrak{Cof}\,\xi \cos\eta \\ x &= c\,\mathfrak{Sin}\,\xi \sin\eta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 37.$$

Die Formeln 29, 30 und 31, 32 lauten dann[1], wenn man für σ_r und σ_t entsprechend die Werte σ_ξ und σ_η einsetzt und in Betracht zieht, daß für diesen besondern Fall:

$$h = \frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 38$$

ist, folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta F = \frac{4}{c^4\,(\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta)^3}\Bigg[&(\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta)\left(\frac{\partial^4 F}{\partial\xi^4} + \frac{2\,\partial^4 F}{\partial\xi^2\,\partial\eta^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial\eta^4}\right) - 4\Bigg\{\mathfrak{Sin}\,2\xi\left(\frac{\partial^3 F}{\partial\xi^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial\xi\,\partial\eta^2}\right) + \sin 2\eta\left(\frac{\partial^3 F}{\partial\xi^2\,\partial\eta} + \frac{\partial^3 F}{\partial\eta^3}\right)\Bigg\} + \\ &+ 4\,(\mathfrak{Cof}\,2\xi + \cos 2\eta)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}\right)\Bigg] = 0 \quad . \quad 39, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2} + \frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial\xi}\frac{\partial F}{\partial\xi} - \frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial\eta}\frac{\partial F}{\partial\eta} \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} - \frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial\xi}\frac{\partial F}{\partial\xi} + \frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial\eta}\frac{\partial F}{\partial\eta} \\ \tau &= -\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial\eta}\frac{\partial F}{\partial\xi} + \frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial\xi}\frac{\partial F}{\partial\eta} \\ \sigma_z &= \frac{1}{m}(\sigma_\xi + \sigma_\eta) \end{aligned}\right\} \quad 40.$$

Die von Pöschl[2] angegebene Airysche Funktion lautet für den Fall einer beliebig geneigten $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

[1] Glückauf 67 (1931) S. 1477.

[2] Lukas, Der Tunnel.

[1] S. Michell, Proc. Lond. Math. Soc. 31 (1900) S. 100, und Pöschl, Math. Z. 11 (1921) S. 89.

[2] Zu gleicher Zeit erschien dieselbe Lösung von K. Wolf, Z. techn. Physik 2 (1921) S. 209.

Hauptspannung (Abb. 9)

$$F=\frac{pc^2}{8}\Big\{\mathfrak{Sin}\,2\xi-\cos 2\alpha\, e^{2(\xi-\xi_0)}-$$
$$-2(\mathfrak{Cof}\,2\xi_0+\cos 2\alpha)\,\xi+$$
$$+[\mathfrak{Cof}\,2(\xi-\xi_0)-1]\,e^{2\xi_0}\cos 2(\eta-\alpha)\Big\}\quad\ldots\quad 41.$$

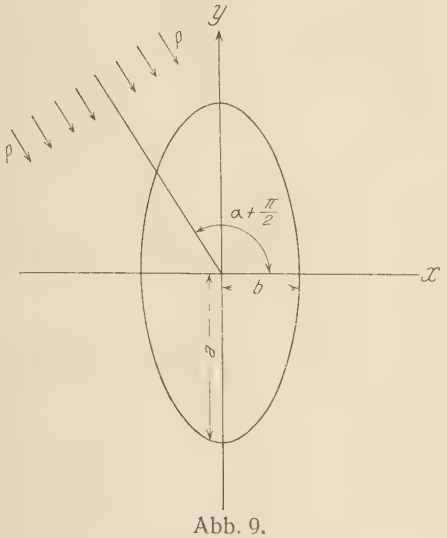

Abb. 9.

Durch Überlagerung vermag man die Airysche Spannungsfunktion für den allgemeinen Fall (Gleichungen 10) bei einer beliebigen Neigung der Hauptachsen beider Ellipsen zu berechnen. Die Funktion lautet:

$$F=\frac{pc^2}{8(m-1)}\Big\{m\,\mathfrak{Sin}\,2\xi+(m-2)\cos 2\alpha\, e^{-2(\xi-\xi_0)}-$$
$$-2[m\,\mathfrak{Cof}\,2\xi_0-(m-2)\cos 2\alpha]\,\xi-$$
$$-(m-2)[\mathfrak{Cof}\,2(\xi-\xi_0)-1]\,e^{2\xi_0}\cos 2(\eta-\alpha)\Big\}\,42.$$

Für den Fall, der hier besonders betrachtet wird, muß man

$$\alpha=0\ \text{und}\ \mathfrak{Tg}\,\xi_0=\frac{b}{a}=\frac{1}{m-1}$$

setzen, womit die Gleichung 41 die Form:

$$F=\frac{pc^2}{8(m-1)(m-2)}\Big\{m(m-2)\,\mathfrak{Cof}\,2\xi-$$
$$-4(m-1)\,\xi-[m(m-2)+2]\,\mathfrak{Cof}\,2\xi\cos 2\eta+$$
$$+2(m-1)\,\mathfrak{Sin}\,2\xi\cos 2\eta+m(m-2)\cos 2\eta\Big\}\,43$$

annimmt. Durch Differentiation kann man sich sofort überzeugen, daß die Funktion 43 die durch die Formel 39 aufgestellte Bedingung erfüllt. Die Spannungskomponenten erhalten die folgenden Werte:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\xi&=\frac{mp}{2(m-1)}-\\
&\quad p\,\frac{m^2(1-\mathfrak{Cof}\,2\xi\cos 2\eta)+2(m-1)(e^{2\xi}\cos 2\eta-1)}{2(m-1)(m-2)(\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta)}\\
\sigma_\eta&=\frac{mp}{2(m-1)}+\\
&\quad+p\,\frac{m^2(1-\mathfrak{Cof}\,2\xi\cos 2\eta)+2(m-1)(e^{2\xi}\cos 2\eta-1)}{2(m-1)(m-2)(\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta)}\\
\tau&=p\,\frac{2(m-1)\,e^{2\xi}-m^2\,\mathfrak{Sin}\,2\xi}{2(m-1)(m-2)(\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta}\sin 2\eta\\
\sigma_z&=\frac{p}{m-1}
\end{aligned}\right\}\ 44.$$

Wie man ohne weiteres feststellen kann, erfüllen die Spannungskomponenten die folgenden Bedingungen:

$$\sigma_{\xi\,\xi=\xi_0}=0,\quad \tau_{\xi=\xi_0}=0.$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{\xi\,\xi\to\infty}&=\frac{p}{2(m-1)}[m+(m-2)\cos 2\eta]\\
\sigma_{\eta\,\xi\to\infty}&=\frac{p}{2(m-1)}[m-(m-2)\cos 2\eta]
\end{aligned}\right\}\ 45.$$

$$\tau_{\xi\to\infty}=\frac{p}{2}\,\frac{m-2}{m-1}\sin 2\eta\quad\ldots\quad 46,$$

womit die Richtigkeit der Lösung bewiesen ist.

In den Abb. 10, 11 und 12 sind die Werte der Spannungen für $m=5$ und $b:a=m-1$ schaubildlich dargestellt. Wie man sich überzeugen kann, sind die Zugspannungen verschwunden, und der Wert der tangentialen Normalspannung am Rande des elliptischen Hohlraums ist konstant und gleich dem Werte:

$$\sigma_{\eta\,\xi\to\xi_0}=\frac{mp}{m-1}\quad\ldots\quad 47,$$

d. h. dieser Wert ist gleich der Summe der beiden im Unendlichen wirkenden Hauptspannungen. Die Summe bleibt, wie man leicht aus den beiden ersten Gleichungen der Gruppe 44 feststellen kann, für jeden Punkt außerhalb des Hohlraums konstant.

Daß der gefundene Querschnitt die günstigste aller möglichen Spannungsverteilungen angibt, läßt sich sofort aus dem Umstande entnehmen, daß die Summe der drei Spannungskomponenten stets konstant und gleich der Summe der drei im Unendlichen wirkenden Hauptspannungen ist und daß der höchste Wert der im Unendlichen wirkenden Schubspannung stetig mit Abnahme der Entfernung kleiner wird, um im Rande des Hohlraums selbst den Wert Null zu erreichen.

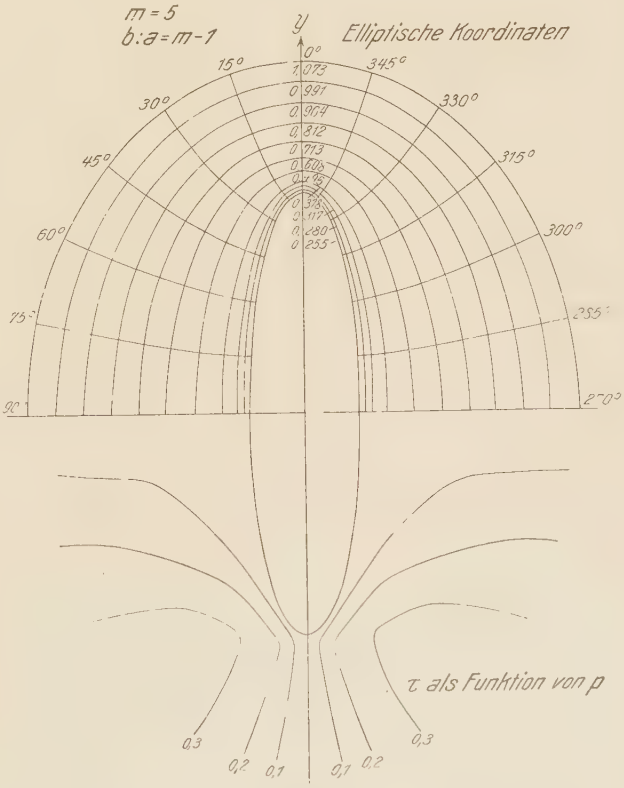

Abb. 10.

Der hohe tangentiale Druck im Hangenden des Tunnels hält die Gesteinsblöcke in zerklüftetem Gebirge vermöge ihrer Reibung fest. Selbst bei vollkommen glatten Gleitflächen kann man sicherlich mit einem Reibungskoeffizienten, der größer als 0,3 ist, rechnen, so daß für $m = 5$, der Reibungswiderstand nicht kleiner als

$$R = 0{,}3 \cdot \frac{5}{4} \cdot p$$

oder für Teufen von über 100 m nicht kleiner als 8 kg/cm² sein wird. Man kann berechnen, daß ein solcher Gesteinsblock Abmessungen haben müßte, welche die Breite der größten Tunnel weit übertreffen (bei einem spezifischen Gewicht von 2,5 müßten die parallel zur Tunnelachse verlaufenden Gleitflächen mehr als 60 m voneinander entfernt sein, damit der Block herunterfallen könnte).

Dieser Umstand liefert den Beweis, daß der angenommene Querschnitt in der Natur niemals erreicht wird, da die sogenannte tangentiale Normalspannung das Herabfallen der Gesteinsblöcke verhindert und damit lange, bevor es zur Bildung dieses Querschnitts kommen könnte, die endgültige Ruhelage wiederherstellt.

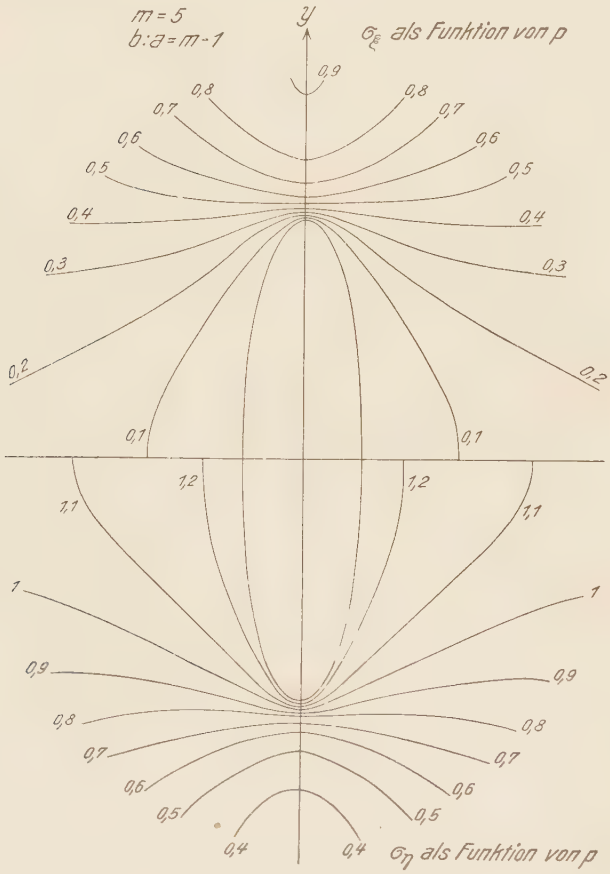

Abb. 11.

Zur Ermittlung des natürlichen Querschnitts sei von folgender Überlegung ausgegangen: Der Kreisquerschnitt verursacht Zugspannungen, die das Gestein zertrümmern, wodurch eine spannungsfreie Zone geschaffen wird; die betrachtete Ellipse ruft anderseits Druckspannungen hervor, welche die Bildung von Brüchen unmöglich machen. Es muß naturgemäß eine Form geben, in der die Spannungen in den Hauptscheiteln gleich Null sind, nämlich eine Ellipse, in der für $\xi = \xi_o$ und $\eta = 0$

$$\sigma_\xi = \sigma_\eta = \tau = \sigma_z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 48$$

ist. Zur Ermittlung dieser Ellipse setzt man in die Gleichung 42 den Wert $\alpha = 0$ ein und erhält dann folgende Form:

$$F = \frac{pc^2}{8\,(m-1)} \Big\{ m \operatorname{Sin} 2\xi + (m-2)\, e^{-2(\xi-\xi_o)} - 2\,[m \operatorname{Cof} 2\xi_o - m + 2]\,\xi - (m-2)\,[\operatorname{Cof} 2(\xi-\xi_o) - 1]\, e^{2\xi_o} \cos 2\eta \Big\} \quad . \quad . \quad 49.$$

Die zweite Formel der Gruppe 40 liefert den Wert:

$$\sigma_\eta = \frac{p}{m-1} \frac{m \operatorname{Sin} 2\xi_o + (m-2)\,(1 - e^{2\xi_o} \cos 2\eta)}{\operatorname{Cof} 2\xi_o - \cos 2\eta} \quad . \quad 50.$$

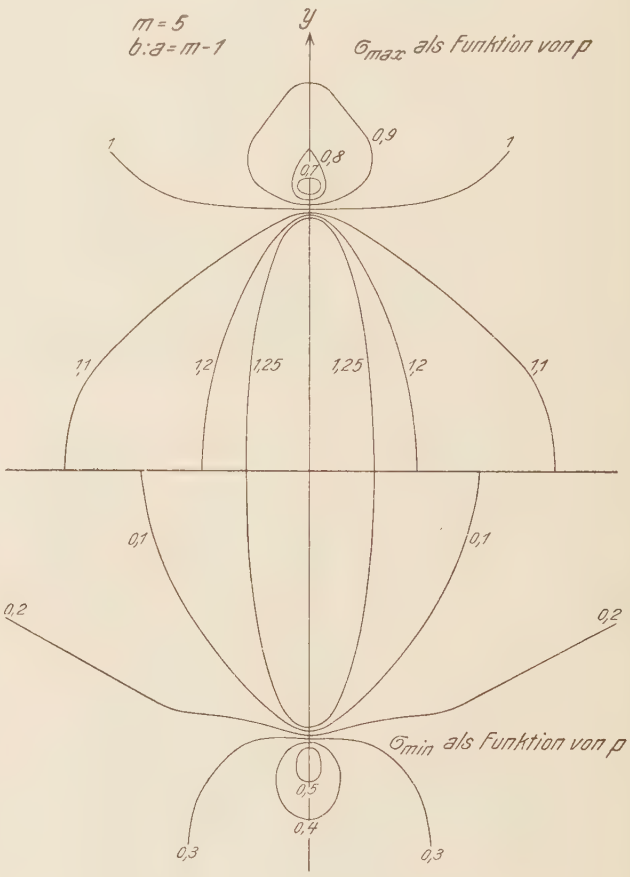

Abb. 12.

Setzt man nun für $\eta = 0$ den Wert der Spannung gleich Null, so ergibt sich die Gleichung:

$$\operatorname{Tg} \xi_o = \frac{b}{a} = \frac{2}{m-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 51,$$

und die Airysche Spannungsfunktion nimmt die Form:

$$F = \frac{pc^2}{8\,(m-1)\,(m-4)^2} \Big\{ m\,(m-2)\,(m-4) \operatorname{Cof} 2\xi - 2\,m\,(m-4) \operatorname{Sin} 2\xi - 4\,m\,(m-4)\,\xi - (m-2)\,[(m-2)^2 + 4] \operatorname{Cof} 2\xi \cos 2\eta + 4\,(m-2)^2 \operatorname{Sin} 2\xi \cos 2\eta + m\,(m-2)\,(m-4) \cos 2\eta \Big\} \quad . \quad 52$$

an, während die Spannungskomponenten folgende Gleichungen haben:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\xi &= \frac{m(m-2)}{2(m-1)(m-4)}p + p\,\frac{m(m-4)(1-\mathfrak{Cof}\,2\xi)+8}{(m-1)(m-4)^2(\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta)^2}\,\mathfrak{Sin}\,2\xi + \\
&\quad + p\,\frac{(m-2)[(m-2)^2+4](\mathfrak{Cof}\,2\xi\cos 2\eta-1)-4(m-2)^2\,\mathfrak{Sin}\,2\xi\cos 2\eta}{2(m-1)(m-4)^2(\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta)} \\
\sigma_\eta &= \frac{m(m-2)}{2(m-1)(m-4)}p - p\,\frac{m(m-4)(1-\cos 2\eta)+8}{(m-1)(m-4)^2(\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta)^2}\,\mathfrak{Sin}\,2\xi - \\
&\quad - p\,\frac{(m-2)[(m-2)^2+4](\mathfrak{Cof}\,2\xi\cos 2\eta-1)-4(m-2)^2\,\mathfrak{Sin}\,2\xi\cos 2\eta+2m(m-4)\,\mathfrak{Sin}\,2\xi}{2(m-1)(m-4)^2(\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta)} \\
\tau &= (m-2)\,p\,\frac{4(m-2)e^{2\xi}-m^2\,\mathfrak{Sin}\,2\xi}{2(m-1)(m-4)^2(\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta)}\,\sin 2\eta + \\
&\quad + p\,\frac{m(m-4)(1-\mathfrak{Cof}\,2\xi)+8}{(m-1)(m-4)^2(\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta)^2}\,\sin 2\eta \\
\sigma_z &= \frac{m-2}{(m-1)(m-4)}p - p\,\frac{2\,\mathfrak{Sin}\,2\xi}{(m-1)(m-4)(\mathfrak{Cof}\,2\xi-\cos 2\eta)}
\end{aligned}\right\} \quad 53.$$

Durch Substitution der entsprechenden Werte kann man sich davon überzeugen, daß diese Gleichungen sämtliche gestellten Bedingungen erfüllen.

Man ersieht aus den angestellten Betrachtungen, daß jeder Hohlraum schließlich elliptische Form annimmt (ausgenommen für $m = 4$), da innerhalb der durch Gleichung 51 festgelegten Ellipse Zugspannungen auftreten, die das Gestein zertrümmern und vollständig entspannen, womit die von Spackeler erkannte spannungslose Zone mathematisch bewiesen wäre.

In den Abb. 13–18 sind die Spannungswerte für $m = 5$ und $m = 7$ schaubildlich dargestellt. Man ersieht daraus, daß der elliptische Hohlraum eine in bezug auf seine Abmessungen beschränkte Umgebung beeinflußt, da, wenn auch die Formeln die ursprünglichen Spannungen erst im Unendlichen angeben, in Wirklichkeit die Werte in der Nähe des Hohlraumes hohe Gradienten haben, so daß in einer Entfernung von 4a bis 5a die Spannungswerte sich kaum von den ursprünglichen Werten unterscheiden. Dies beweist, daß die erhaltenen Ergebnisse ziemlich genau mit den natürlichen Verhältnissen übereinstimmen müssen, obwohl das Eigengewicht des Gesteins vernachlässigt worden ist, da die Genauigkeit der Formeln durch das Verhältnis der Tiefe des Tunnels zum Radius der beeinflußten Zone bedingt wird.

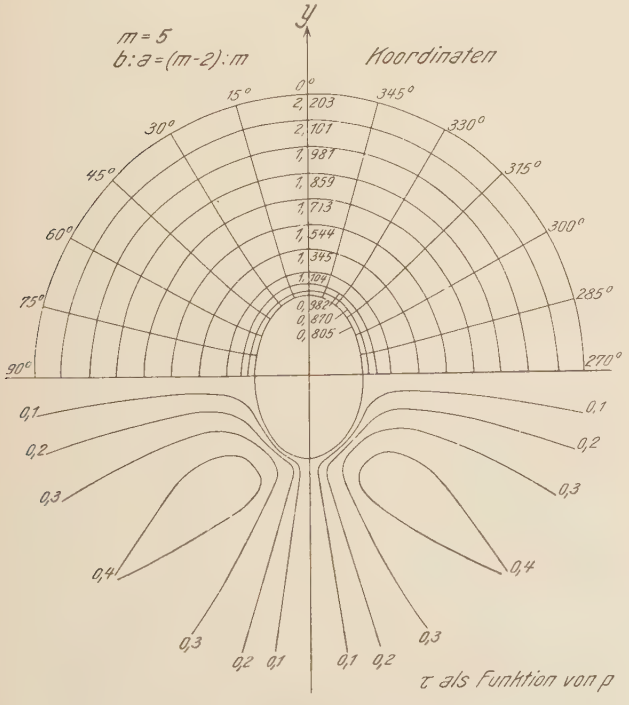

Abb. 13.

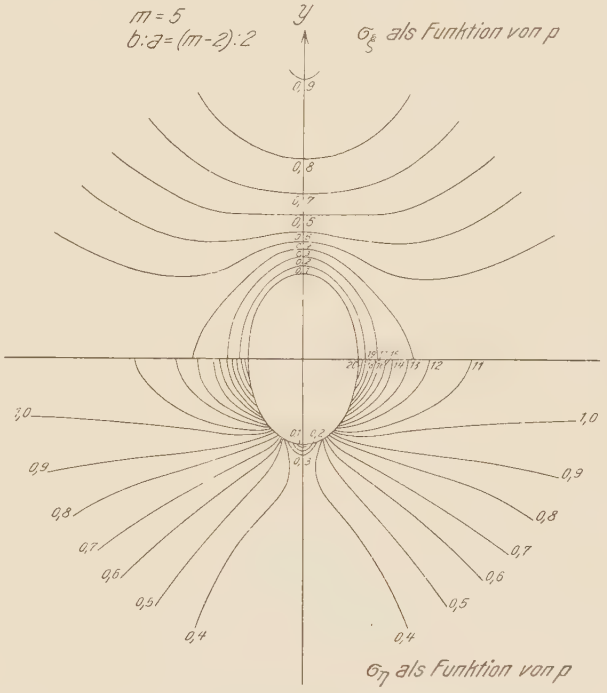

Abb. 14.

Wenn auch die in der Natur beobachteten Erscheinungen nicht genau mit den Berechnungen übereinstimmen sollten, weil das Gestein weder homogen ist noch sich streng an das Hookesche Gesetz hält, so muß doch sowohl das Vorhandensein einer spannungslosen Zone als auch die vollständige Aufnahme der Spannungen durch das den Hohlraum umgebende Gebirge als bewiesen angesehen werden, womit der Zweck der ganzen Untersuchung erfüllt wäre.

Man bedenke jedoch, daß in hinreichender Tiefe die Spannung am Rande des Hohlraums größer als die

Bruchspannung des betreffenden Gesteins werden kann, da ja

$$\sigma_{\eta_{max}} = \frac{m^2}{(m-1)(m-2)} p$$

ist, und somit für $m = 5$ $\sigma_\eta = 2{,}083\,p$ wird, so daß das Gestein zertrümmert werden könnte, wodurch sowohl die Breite als auch die Höhe des Hohlraums größer werden müßten; es käme also niemals zur Wiederherstellung des Gleichgewichtszustandes. Im folgenden Abschnitt soll diese offen gebliebene Frage beantwortet werden.

Spannungszustand um einen Hohlraum mit kreisförmigem Querschnitt im plastischen Gebirge.

Senkrechter Schacht.

Man betrachte die bei der Tiefe h gelegene Scheibe PQ (Abb. 19), die den Schacht umgibt und sich bis ins Unendliche erstreckt; man stelle sich vor, daß im Ausbau des Schachtes horizontale Schlitze gelassen wurden, damit das Medium in den Schacht fließen kann und dadurch der Ausbau entlastet wird. Man könnte sich auch einen nachgiebigen Schachtausbau denken, da es ja grundsätzlich nur darauf ankommt, die ursprünglich hochgespannten Massen, die den Schacht umgeben, durch Raumdehnung zu entlasten. Man nehme an, daß es sich um reinen feuchten Ton handelt, der bekanntlich sehr plastisch ist, und denke sich den ganzen Schachtausbau mit Schlitzen versehen, so daß täglich viele Tonnen Material aus dem Schacht entfernt werden können. Man lege sich nun die Frage vor, ob im Ton mit $\mu = 0{,}36$ und $c = 1$ kg/cm² jemals ein Spannungszustand bei 1000 m Tiefe eintreten kann, der ein vollständiges Gleichgewicht herbeiführt und somit das Hereinfließen der Massen unmöglich macht.

Da die Kohäsion für den ungünstigsten Fall gleich 1 kg/cm² gesetzt worden ist, kann man den ursprünglichen Spannungszustand mit Hilfe der Formeln 21 darstellen, wobei σ_r für $\varphi = 0$ gleich p ist oder, wenn $\gamma = 2{,}4$ und $h = 1000$ m ist, 240 kg/cm² beträgt. σ_t stellt für $\varphi = 0$ die waagrechte Hauptspannung in irgendeiner Richtung dar, da es sich um ein Rotationsspannungsellipsoid handelt, und es gilt

$$\sigma_t = \frac{240}{K-1} = \frac{240}{(\mu + \sqrt{1+\mu^2})^2} = 120 \text{ kg/cm}^2.$$

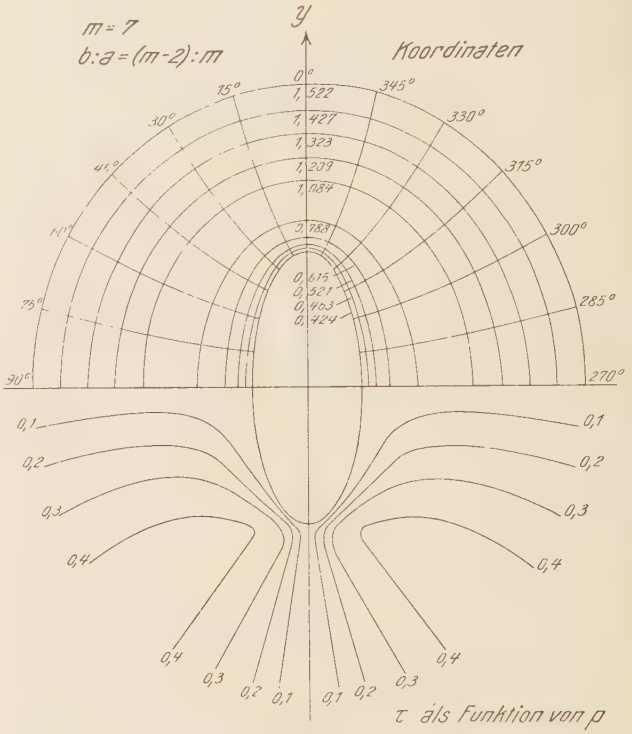

Abb. 16.

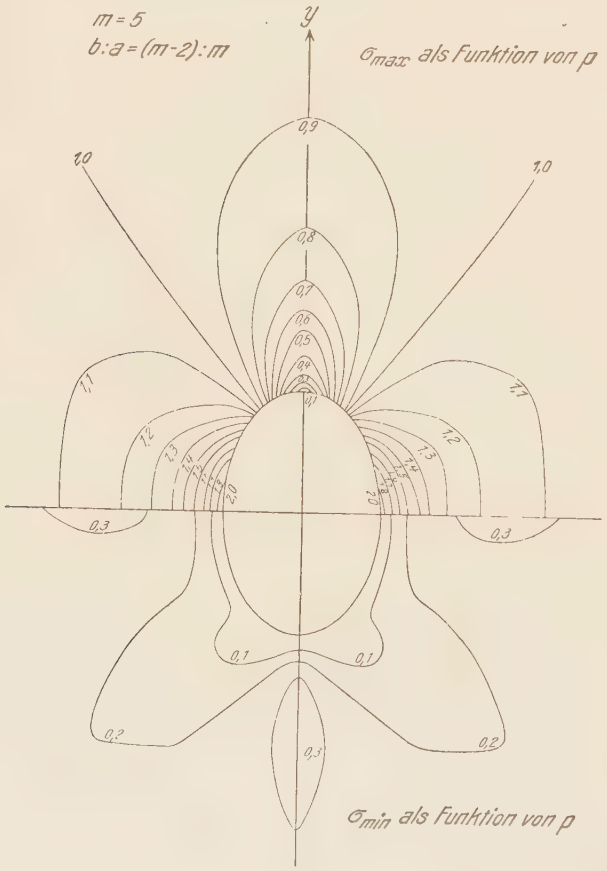

Abb. 15.

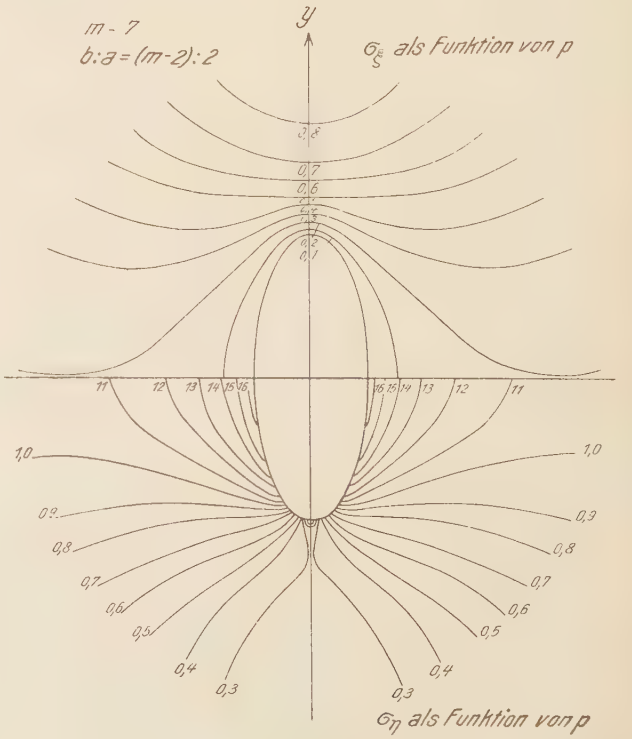

Abb. 17.

Betrachtet man die Spannungen in der Scheibe selbst, so sieht man, daß sie überall gleich sind (das Eigengewicht kann vernachlässigt werden, weil sich die Scheibe beliebig dünn wählen läßt), so daß die Spannungsellipse durch einen Kreis ersetzt werden muß.

Denkt man sich ein Koordinatensystem in die Scheibe gelegt, wobei die x–y-Ebene die Symmetrieebene der Scheibe ist, so kann man den ursprünglichen Spannungszustand durch die Formeln $\sigma_x = \sigma_r = 120$ kg je cm², $\sigma_y = \sigma_t = 120$ kg/cm², $\tau = 0$ wiedergeben (in diesem Falle ist die dritte Hauptspannung die größere Hauptspannung). Aus Symmetriegründen muß man selbstverständlich Polarkoordinaten einführen, so daß der Ursprung im Zentrum des kreisrunden Schachtes zu liegen kommt.

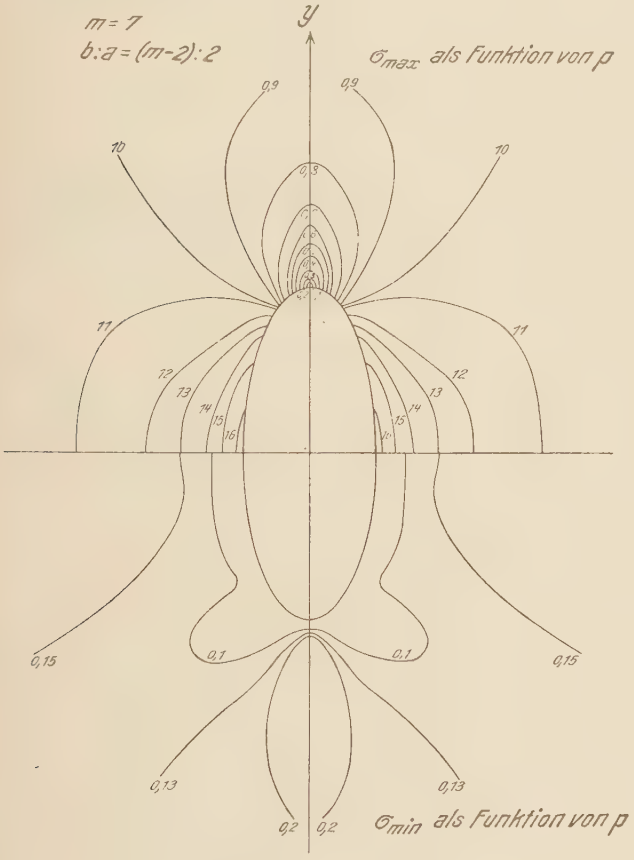

Abb. 18.

Nach Abteufen des Schachtes setzen sich sämtliche Körnchen in Bewegung, und zwar bewegen sie sich, da es sich um einen kreisförmigen Querschnitt handelt, in Richtung des Radius, auf dem sie sich vor dem Eingriff befunden haben. Anderseits bewegen sich alle Körnchen, die vor dem Abbohren auf demselben Kreise lagen, um denselben Betrag, so daß zwischen zwei auf diesem Kreise liegenden benachbarten Körnern keine relative Verschiebung und somit auch keine Schubspannung auftreten kann, und da die Schubspannung in Richtung des Radius vor der Bewegung gleich Null gewesen ist, muß sie auch nach dieser Bewegung gleich Null sein. Die Richtung des Radius und damit der Tangente wird also auch nach der Bewegung Hauptrichtung sein, und somit müssen die Hauptspannungen mit den Richtungen von Radius und Tangente zusammenfallen. Dieser Umstand gestattet, die Gleichung der Fließlinien festzustellen, da diese die Richtungen der Hauptspannungen unter konstantem Winkel schneiden müssen und damit auch die Richtung eines beliebigen Radius.

Bekanntlich erfüllt die logarithmische Spirale, deren Gleichung $r = ae^{m\varphi}$ lautet, diese Bedingung, weil die Tangente in einem beliebigen Punkte P mit dem Leitstrahl OP den konstanten Winkel $\psi = \operatorname{arc\,tg}\, m$ bildet. Da aber ψ zwei Werte besitzen kann, nämlich:

$$\psi' = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} \text{ und } \psi'' = \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2},$$

so ist die Schar der Gleitlinien noch unbestimmt.

Um sie zu bestimmen, muß man die Richtung der größern Hauptspannung festlegen, die ja sowohl mit der Richtung eines beliebigen Radius als auch mit der entsprechenden Tangente irgend eines zum Schachte konzentrischen Kreises übereinstimmen kann. Wenn man bedenkt, daß nach dem Abbohren des Schachtes σ_r plötzlich sehr klein wird, während σ_t bestrebt ist, größer zu werden, weil sich der Umfang eines beliebigen Kreises durch die radiale Bewegung der Körnchen verringert, so kommt man ohne weiteres zu dem Schluß, daß erst dann Gleichgewicht zwischen den Hauptspannungen bestehen kann, wenn die Gleichung

$$(K-1)\,\sigma_R = \sigma_T \quad \ldots\ldots\ldots \quad 54$$

erfüllt ist, weil diese den größtmöglichen Wert, den σ_T für einen gegebenen Wert von σ_R überhaupt erreichen kann, festlegt. Die Bezeichnung der Indices mit großen Buchstaben soll andeuten, daß es sich um Hauptspannungen handelt[1].

Umgekehrt kann σ_R in bezug auf σ_T niemals kleinere als die durch die Gleichung 54 bedingten Werte erreichen, weil andernfalls ein Abfließen des Mediums in den Hohlraum einsetzen würde, was gegen die Grundbedingungen der Aufgabe verstieße. Man muß vielmehr den Spannungszustand der Ruhe darstellen, da es ja letzten Endes darauf ankommt, festzustellen, ob und unter welchen Bedingungen Gleichgewicht im Gebirge zustandekommt.

Damit hätte man die Aufgabe auf die Bestimmung des Wertes von σ_R beschränkt, weil, sobald dieser Wert bekannt ist, Richtung, Sinn und Größe sämtlicher

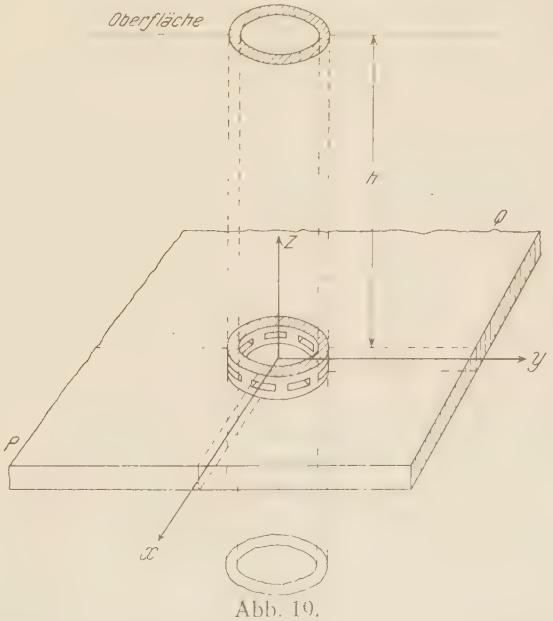

Abb. 19.

[1] Die andere Lage der Hauptspannungen kann nur bei einem Medium, das Zugkräfte aushält, in Betracht kommen. Dehnung eines Hohlraums mit Hilfe eines Bolzens (s. Fließfiguren in Hütte: Mechanik der bildsamen Körper, Bd. 1).

Spannungen angegeben werden können. Um die Differentialgleichung aufzustellen, braucht man nur zu bedenken, daß für diesen besondern Fall die Formeln 32 aus Symmetriegründen unabhängig von φ sind und somit folgende Werte besitzen:

$$\sigma_R = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r};\ \sigma_T = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2};\ \tau = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 55.$$

Zieht man die Bedingung 54 in Betracht, so erhält man

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - (K-1)\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 56.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$F = \frac{C}{K} r^K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 57,$$

und man erhält[1]

$$\sigma_R = C r^{K-2};\ \sigma_T = C\,(K-1)\,r^{K-2}.$$

Um die Konstante C zu bestimmen, bezeichne man mit σ_{R_a} die Spannung am Schacht selbst. Man setzt also $r = a$ und erhält $C = \frac{\sigma_{R_a}}{a^{K-2}}$. Die Spannungen haben die Werte

$$\sigma_R = \sigma_{R_a}\left(\frac{r}{a}\right)^{K-2};\ \sigma_T = (K-1)\,\sigma_{R_a}\left(\frac{r}{a}\right)^{K-2} \quad . \quad 58.$$

Für den angenommenen Wert von $\mu = 0{,}36$ oder genauer für $\mu = 0{,}35354$ erhält man

$$\sigma_R = \sigma_{R_a}\frac{r}{a};\ \sigma_T = 2\,\sigma_{R_a}\cdot\frac{r}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 59,$$

d. h. die Spannung wächst proportional mit der Entfernung vom Schacht.

Bedenkt man, daß der niedrigste für bergmännische Medien in Betracht kommende Reibungswinkel mit 20^0 angesetzt werden darf, also $\mu = 0{,}364$, so ist ersichtlich, daß für jede bergmännische Teufe schließlich Gleichgewicht um den Schacht herrschen und das Medium zur Ruhe kommen muß, d. h., daß für irgendeine Teufe der Druck auf den Ausbau bis auf die niedrigsten Kohäsionswerte sinken kann. Diese bemerkenswerte Schlußfolgerung war vorauszusehen, weil man sonst schwerlich eine Erklärung für die Offenhaltung der Höhlen von kleinen Tieren in kohäsionsarmen Gebieten geben könnte. Auch würde die überall beobachtete Tatsache, daß nach längerer Zeit die Hohlräume in den Bergbauen zur Ruhe kommen, vollständig rätselhaft erscheinen, wenn sich nicht mit der Zeit eine spannungsarme Zone um dieselben bilden würde.

Um zu beweisen, daß die Formeln 58 die einzige Lösung der Aufgabe darstellen, ist es notwendig, die Randbedingung an der Grenze der Fließzone zu bestimmen und den Beweis zu erbringen, daß die Gleichungen 58 dieser Bedingung genügen. Da das Medium aus elastischen Körnern besteht, gilt das Hookesche Gesetz, solange der Quotient der Hauptspannungen sich unterhalb des kritischen Wertes befindet. Außerhalb der Fließzone wird der Quotient vom kritischen Werte (am Rande der Fließzone) bis auf eins herabsinken (im Unendlichen), so daß die Formeln der Scheibe, die für diesen Fall unabhängig von φ sind, da die Hauptspannungen in unendlicher Entfernung einander gleich sind, folgendermaßen lauten:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{\partial F}{\partial r}\right) = 0 \\ &\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r};\ \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2};\ \tau = 0 \\ &\sigma_z = p_s - \frac{2\,p_s}{m\,(m-1)} + \frac{1}{m}\,(\sigma_r + \sigma_t) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 60.$$

Mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion:

$$F = C_0 + C_1 \ln r + C_2 r^2 + C_3 r^3 \ln r \quad . \quad . \quad . \quad 61,$$

in der für diesen Fall $C_3 = 0$ gesetzt werden kann, da der Zentriwinkel außerhalb der kritischen Zone konstant bleibt, gelangt man nach Einführung der Grenzbedingungen zu folgenden bekannten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= p - (p-p')\frac{b^2}{r^2} \\ \sigma_t &= p + (p-p')\frac{b^2}{r^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 62,$$

worin p der Druck im Unendlichen, p′ der Druck am Rande der Fließzone und b der Radius dieser Fließzone ist. Zur Berechnung von p′ gehe man von der Überlegung aus, daß die Summe der beiden Hauptspannungen konstant und gleich sein muß:

$$\sigma_r + \sigma_t = 2\,p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 63.$$

Da aber am Rande der Fließzone σ_T den größtmöglichen Wert erreicht, der einerseits durch die Gleichung 54 und anderseits durch die Gleichung 63 bestimmt wird, so folgt die Gleichung

$$\sigma_R + \sigma_R\,(K-1) = 2\,p$$

aus der ohne weiteres σ_R berechnet werden kann:

$$p' = \sigma_R = \frac{2\,p}{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 64.$$

Wenn man in die Gleichung 58 diesen Wert sowie $r = b$ einsetzt, so erhält man:

$$\frac{2\,p}{K} = \sigma_{R_a}\left(\frac{b}{a}\right)^{K-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 65,$$

woraus sich der Wert von b berechnen läßt. Die Hauptspannungen innerhalb der Fließzone lauten demnach, sobald das Gleichgewicht hergestellt ist, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_R &= \sigma_{R_a}\left(\frac{r}{a}\right)^{K-2} \\ \sigma_T &= (K-1)\,\sigma_{R_a}\left(\frac{r}{a}\right)^{K-2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 66.$$

Außerhalb der Fließzone sehen die Werte der Spannungen folgendermaßen aus:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_R &= p\left[1 - \frac{b^2}{r^2}\left(1 - \frac{2}{K}\right)\right] \\ \sigma_T &= p\left[1 + \frac{b^2}{r^2}\left(1 - \frac{2}{K}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 67.$$

In Abb. 20 oben sind die Werte der Spannungen für $\mu = 0{,}75$ (gestrichelt) und $\mu = 0{,}5773$ (voll ausgezogen) und unten für $\mu = 0{,}35354$ wiedergegeben, wobei angenommen wurde, daß $\sigma_{Ra} = 1$, $\gamma = 2{,}4$ und $h = 1000$ m sind. Mit diesen Werten erhält man bei einem senkrechten Druck von 240 kg/cm² ($\gamma \cdot h$) für den ursprüng-

[1] Dieselbe Aufgabe löste Hartmann auf anderm Wege. S. Nádai, Handbuch der Physik, Bd. 6: Das Gleichgewicht lockerer Massen.

lichen horizontalen Druck p (Formel 22) folgende Werte:

Reibungszahl μ	Quotient K−1	Exponent K−2	Fließzone b	Druck p
0,75	4	3	2,8845 a	60
0,5773	3	2	6,3246 a	80
0,35354	2	1	80,0 a	120

Die dritte Spalte gibt den Wert des Exponenten an, so daß die Spannungen, wie daraus zu ersehen ist, für die ersten beiden Reibungszahlen proportional zum Kubus bzw. zum Quadrat der Distanz wachsen, während für die letzte Reibungszahl die Spannung verhältnisgleich mit der Entfernung zunimmt.

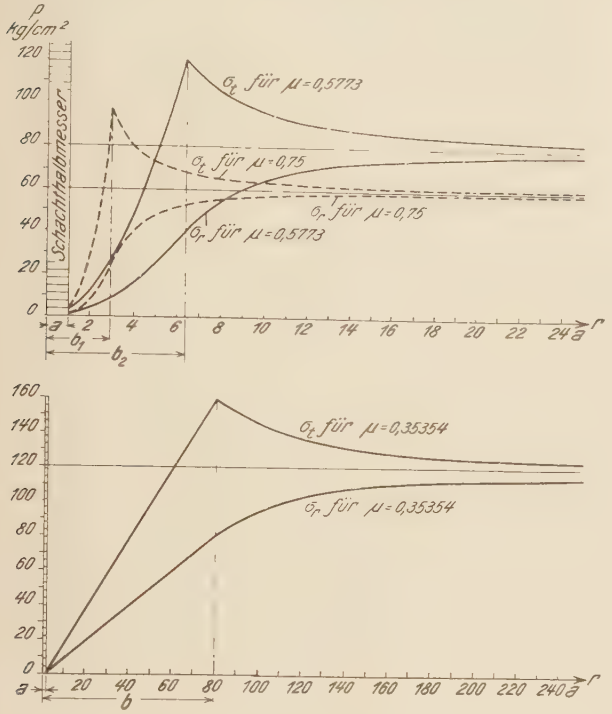

Abb. 20.

Wie aus den Abbildungen hervorgeht, wächst der Halbmesser b der Fließzone von b = 2,8845 a bei μ = 0,75 bis zu b = 80 a bei μ = 0,35354. Dies beweist, daß in Lehm, Ton und Letten die berechneten Spannungen erst nach sehr langer Zeit erreicht werden, weil die Bewegung des Mediums infolge der hohen Reibungszahl sehr langsam vor sich gehen muß.

In der Praxis wird man für gemauerte Schächte und in Medien mit niedrigem Reibungskoeffizienten den Endwert von σ_{Ra} niemals voraussagen können, weil dieser Wert hauptsächlich von der während der Bauzeit aus dem Hohlraum entfernten Materialmenge abhängt. Hingegen kann man damit rechnen, daß in Medien mit hohen Reibungskoeffizienten der Spannungsausgleich in verhältnismäßig kurzer Zeit vor sich gehen wird und somit der auf den Schachtausbau wirkende Druck sehr niedrig und praktisch von der Tiefe unabhängig sein wird, weil die dritte Hauptspannung σ_z die Werte

$$\sigma_r \leqq \sigma_z \leqq \sigma_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 68$$

annehmen muß, damit Gleichgewicht besteht.

Die Einführung der dritten Hauptspannung, die bis jetzt stillschweigend als konstant (bei der Bestimmung der Spannungen außerhalb der Fließgrenze) angesehen wurde, sowie die Berücksichtigung des Eigengewichtes zwingen zu Berechnungen in drei Dimensionen, um den Beweis zu liefern, daß die dritte Hauptspannung nirgends negativ oder kleiner als σ_{Ra} wird, weil sonst ein Spannungsausgleich unmöglich ist.

Um der Beweisführung die einfachste Grundlage zu geben, betrachte man jetzt (Abb. 21) einen sphärischen Hohlraum im Innern des plastischen Mediums und senkrecht oberhalb davon bei einer Entfernung r ein Element, das in Gedanken aus der zum Hohlraum konzentrischen Kugel vom Halbmesser r herausgeschnitten worden ist. Es bezeichne σ die radiale Spannung, γ das spezifische Gewicht, dφ den Winkel, den die Strahlen untereinander bilden, dr die Entfernung zwischen der obern und untern Fläche des Elementes und a den Halbmesser des kugelförmigen Hohlraums.

Das Medium soll, genau wie im vorigen Beispiele, die Möglichkeit haben, sich auszudehnen und in den Hohlraum zu fließen. Aus Symmetriegründen müssen die Seitenflächen des Elementes Hauptspannungsebenen sein, so daß keine Schubspannungen daran wirken. Anderseits müssen im Grenzzustand die Hauptspannungen an den Seitenflächen gleich (K−1) σ und die auf der obern Fläche wirkende gleich $\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial r} dr$ sein (wenn die untere Spannung mit σ bezeichnet wird).

Nimmt man die Senkrechte als Projektionsachse, so erhält man folgende Gleichung:

$$2\,(K-1)\,\sigma \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi^2 - \gamma r^2\,dr\,d\varphi^2 - \\ - \frac{\partial \sigma}{\partial r} r^2\,dr\,d\varphi^2 \quad 2\,\sigma r\,dr\,d\varphi^2 = 0.$$

(Die unendlich kleinen Größen vierter Ordnung wurden hierbei vernachlässigt.) Streicht man den gemeinsamen Faktor und teilt die Gleichung durch r, so erhält man die homogene Differentialgleichung

$$\frac{d\sigma}{dr} - 2\,(K-2)\,\frac{\sigma}{r} + \gamma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 69,$$

deren Lösung wie folgt lautet:

$$(K-5)\,\sigma = C\,r^{2\,(K-2)} - \gamma r.$$

Setzt man für r = a, σ = σ_a, so findet man

$$C = \frac{2\,(K-5)\,\sigma_a - \gamma a}{a^{2\,(K-2)}},$$

und die Gleichung nimmt die Form

$$\sigma = \left(\sigma_a - \frac{\gamma a}{2\,K-5}\right)\left(\frac{r}{a}\right)^{2\,(K-2)} + \frac{\gamma r}{2\,K-5} \quad . \quad . \quad 70$$

an. Für γ = 0 gilt diese Gleichung für jede Richtung und stellt somit die Lösung im dreidimensionalen

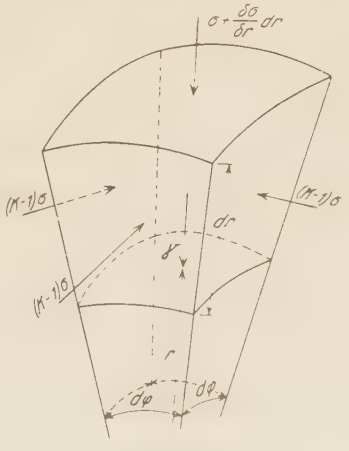

Abb. 21.

Spannungszustand dar. Zieht man jedoch noch das Eigengewicht in Betracht ($\gamma \neq 0$), so gilt sie nur für die OZ-Achse.

Setzt man nun den niedrigsten Wert $K = 3$ ein, so erhält man

$$\sigma = (\sigma_a - \gamma a)\left(\frac{r}{a}\right)^2 + \gamma r \quad \ldots\ldots\ldots 71,$$

d. h. die Spannung kann, wenn $\sigma_a > \gamma a$ ist, keine negativen Werte annehmen.

Setzt man $a = 400$ cm, $\gamma = 2{,}5$, so verschwindet das erste Glied für $\sigma_a = 1$ kg/cm², und σ wächst proportional mit der Entfernung. Die Fließzone würde sich hierbei bis zum dritten Teil der betrachteten Teufe, vom Koordinatenursprung aus gemessen, erstrecken, da in diesem Punkte die Summe der beiden Hauptspannungen den ursprünglichen Wert erreicht.

Für $K = 2{,}5$ erhält man

$$\sigma = \sigma_a \frac{r}{a} \quad \gamma r \ln \frac{r}{a} \quad \ldots\ldots\ldots 72,$$

weil

$$\lim_{K \to 2{,}5} \frac{a\left(\frac{r}{a}\right)^{2(K-2)} - r}{2K - 5} = r \ln \left(\frac{r}{a}\right)$$

ist.

An der Oberfläche ist $\sigma = 0$, d. h.

$$\ln \frac{r}{a} = \frac{\sigma_a}{a\gamma}.$$

Da $r : a = 250$ ist, so muß $\sigma_a = 5{,}52146$ kg/cm² sein, damit für $a = 4$ m, $r = 1000$ m und $\mu = 0{,}204$ das Medium überhaupt zu fließen aufhört. Ein Reibungswinkel von $11^0 30'$ dürfte für den Bergbau nicht in Betracht kommen, so daß die obige Überlegung nur theoretischen Wert besitzt.

Um beide Aufgaben zu vergleichen, bedenke man, daß in der Kugel bei Vernachlässigung des Eigengewichtes die Spannung für $K = 3$ nach der Formel 71 wie folgt wächst

$$\sigma = \sigma_a \left(\frac{r}{a}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots 73,$$

während in der Scheibe (Formel 59)

$$\sigma = \sigma_a \frac{r}{a} \quad \ldots\ldots\ldots 74$$

gilt.

Im Schacht ist die letzte Formel maßgebend, so daß die Formel 73 ungültig wird.

Um zu beweisen, daß der senkrechte Wert der Hauptspannung stets positiv ist, ziehe man in Betracht, daß in der Kugel die senkrechte Hauptspannung σ_s folgende Funktion der waagrechten Hauptspannung σ_h ist:

$$\sigma_s = \sigma_h - \gamma a \sqrt{\frac{\sigma_h}{\sigma_a}}\left(\sqrt{\frac{\sigma_h}{\sigma_a}} - 1\right) \quad \ldots\ldots 75.$$

Damit σ_s keine negativen Werte annimmt, genügt es, daß σ_h positiv und das letzte Glied stets kleiner als σ_h ist. Für den Fall des Schachtes wird der Wert von σ_h durch die Formel 74 bestimmt. Setzt man diesen in die Formel 75 ein, so erhält man

$$\sigma_s = r\left(\frac{\sigma_a}{a} - \gamma\right) + \gamma \sqrt{ar} \quad \ldots\ldots\ldots 76.$$

Damit nun in diesem Falle keine Zugspannungen auftreten, ist es auch notwendig, daß $\sigma_a \geqq a\gamma$ ist. Der wirkliche Wert von σ_s muß sich zwischen den beiden äußersten Werten der Formeln 75 und 76 befinden, denn die Formel 75 nimmt an, daß die dritte Hauptspannungsfläche eine Neigung $\frac{d\varphi}{2}$ zum Halbmesser besitzt, während die Formel 76 von der Annahme ausgeht, daß die dritte Hauptspannungsfläche parallel zum betrachteten Halbmesser liegt. Damit wäre bewiesen, daß, solange $\sigma_a \geqq a\gamma$ ist, unmöglich Zugspannungen auftreten können, und somit dürfte die Untersuchung als beendet zu betrachten sein. Zusammenfassend kann man sagen, daß die Offenhaltung eines Schachtes in irgendeinem für den Bergmann in Betracht kommenden Medium nach Herstellung des Gleichgewichtes sichergestellt ist, solange $\sigma_a > \gamma a$ ist.

Um nun näherungsweise die Materialmenge zu bestimmen, die aus dem Schachte entfernt werden muß, damit Gleichgewicht eintritt, bedenke man, daß die bezogene Raumdehnung gleich

$$e = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\frac{m - 2}{mE} \quad \ldots\ldots\ldots 77$$

ist.

Setzt man $\gamma = 2{,}4$, $\mu = 0{,}35354$, $h = 1000$ m, $a = 3$ m, $m = 5$ und $E = 300000$ kg/cm², so erhält man für den ursprünglichen Spannungszustand $e = 0{,}00096$. Da die Fließzone 480 m Durchmesser hat, so ist die gesamte ursprüngliche Raumdehnung je laufendes Meter des Schachtes rd. $V_1 = 173$ m³. Nach der Entspannung ist die Raumdehnung, wenn man für σ_a die Einheit nimmt und σ_z den Wert der größten Hauptspannung bezeichnet, gleich $V_2 = 96{,}3$ m³.

Der Unterschied von 76,7 m³ stellt die Materialmenge dar, die in den Schacht fließen muß, damit Gleichgewicht eintreten kann.

Da sich die beim Abteufen des Schachtes entfernte Materialmenge ($a = 3$ m) auf rd. 28 m³ belief, kann man darauf schließen, daß im ganzen mehr als 100 m³ Erde je laufendes Meter des Schachtes entfernt werden müssen, bis sich endgültig Gleichgewicht einstellt.

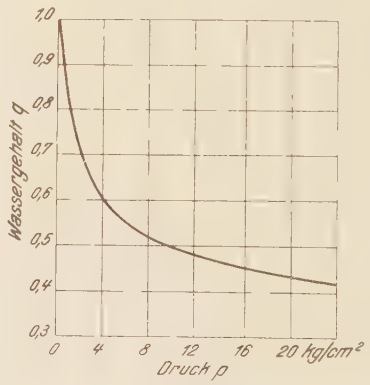

Abb. 22.

Nach K. Terzaghi[1] ist der Wassergehalt des Tones eine Funktion des Druckes. In Abb. 22 ist die Abhängigkeit vom Druck des auf die Raumeinheit der trocknen Substanz bezogenen Wassergehaltes q eines Tones schaubildlich dargestellt. Wie aus dieser Abbildung hervorgeht, sinkt der Wassergehalt bis zur Hälfte des ursprünglichen Wertes, wenn der Druck von Null bis auf 8 at steigt. Umgekehrt müssen Tone, Lehme, Letten usw. Wasser aufnehmen, wenn sich der Druck vermindert. Dies erklärt die bekannte Tatsache, daß sich eine in Ton getriebene Strecke anfänglich nur wenig von einer Strecke in festem tonigem Sand-

[1] Nádai, Handbuch der Physik, Bd. 6, Ziff. 33 (Das Wärmeleitungsgleichnis von Terzaghi).

stein unterscheidet, weil der Wassergehalt des Tones wegen des hohen ursprünglichen Druckes sehr gering ist, so daß der Ton eine hohe Kohäsion aufweist. In wenigen Tagen geht die Strecke zu Bruch und die Materialmengen, die zu ihrer Offenhaltung entfernt werden müssen, sind noch größer als die oben berechneten, weil die Raumdehnung nicht nur durch den Druck bedingt wird, sondern auch durch die Feuchtigkeitsaufnahme.

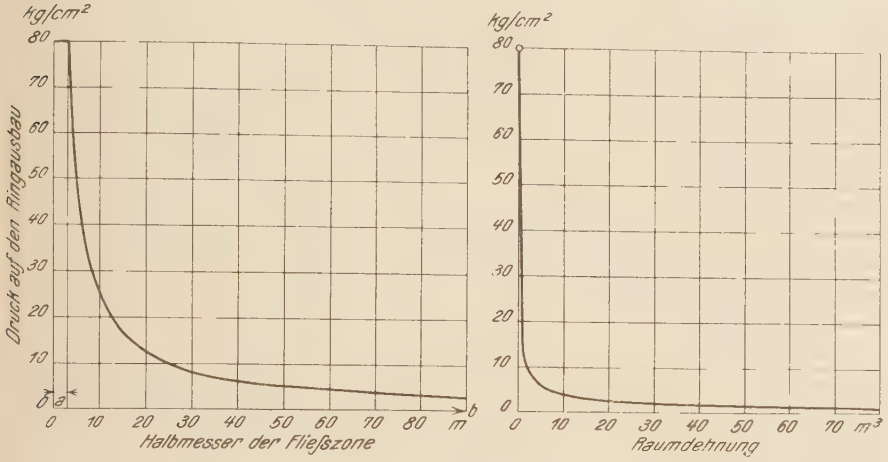

Abb. 23.

Da diese sehr langsam vor sich geht, und zwar so, daß sich der Rauminhalt asymptotisch dem neuen Gleichgewichtswert nähert, liegt es auf der Hand, daß der neue Gleichgewichtsspannungszustand theoretisch erst in unendlicher Zeit erreicht wird. Diese zwei Faktoren (die Zeit und die aus dem Schacht zu entfernende Materialmenge) zwingen den Bergmann, die Schächte, und den Zivilingenieur, die Tunnelbauten auszumauern. Im Simplon z. B. mußte der Tunnel auf einer 40 m langen Strecke mit einem Ausbau versehen werden, der im Durchschnitt über 2 Meter Mächtigkeit aufwies.

In Abb. 23 links ist die Abhängigkeit des Halbmessers der Fließzone vom Druck auf den Ausbau für $\mu = 0{,}35354$, $a = 3$ m, $\gamma = 2{,}4$ und $h = 1000$ m schaubildlich dargestellt und in Abb. 23 rechts die Raumdehnung für dieselben Werte. Man ersieht aus den Kurven, daß die Fließzone und die Raumdehnung mit wachsendem Druck auf den Ausbau sehr schnell abnehmen.

Die vorstehenden Untersuchungen behandeln den ungünstigsten Fall. Setzt man jetzt für $c = 15$ kg/cm², $\mu = 0{,}5774$ (sehr milder Tonsandstein), so erhält man bei $h = 1000$ m, $\gamma = 2{,}4$, $m = 5$, $a = 3$ m und $E = 300000$ kg/cm² für den Halbmesser der Fließzone den Wert 6 m und für die Raumdehnung 28,5 l je laufendes Meter. Die letzte Ziffer entspricht einer Verminderung des ursprünglichen Halbmessers des Schachtes um rd. 1 cm.

Bevor auf die nächste Aufgabe eingegangen wird, sei noch die Abhängigkeit der Fließzone von der Teufe näher betrachtet. Bedenkt man, daß der waagrechte ursprüngliche Druck $p_h = \frac{\gamma \cdot h}{K - 1}$ ist und nimmt man Formel 65 zu Hilfe, so erhält man folgenden Ausdruck für den Halbmesser b der Fließzone:

$$b = a \sqrt[K-2]{\frac{2}{K(K-1)} \frac{\gamma h}{\sigma_{R_a}}} \quad \ldots\ldots 78.$$

Selbstverständlich können nur positive Werte in Betracht kommen, und unter der Wurzel haben nur diejenigen Werte Gültigkeit, die größer oder gleich 1

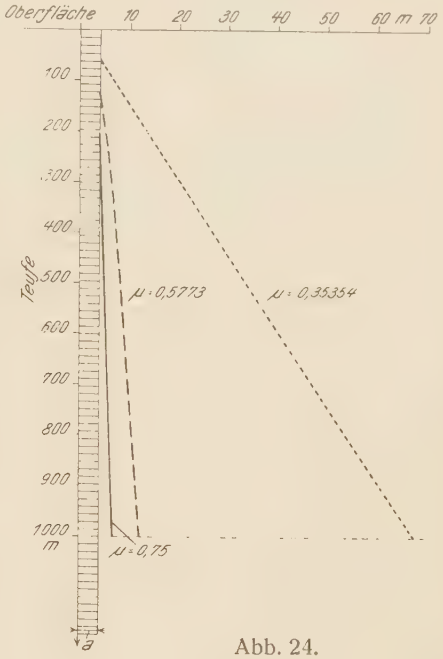

Abb. 24.

sind. In Abb. 24 ist die Fließzone für $a = 4$ m, $\gamma = 2{,}5$, $\sigma_{Ra} = 5$ kg/cm², $\mu = 0{,}35354$, also $K = 3$ (punktiert), $\mu = 0{,}5773$, also $K = 4$ (gestrichelt) und $\mu = 0{,}75$, also $K = 5$ (voll ausgezogen) wiedergegeben. Man beachte die geringe Ausdehnung der Fließzone bei höhern Reibungskoeffizienten.

Waagrechte Tunnel oder Stollen.

Nunmehr sei ein zylindrischer Hohlraum untersucht, der waagrecht bei einer Teufe h in ein plastisches homogenes Medium getrieben worden ist. Wie beim vorigen Beispiel soll der Ausbau Schlitze haben oder nachgiebig sein, damit eine Entspannung des Mediums, das den Stollen umgibt, möglich wird. Um den räumlichen Spannungszustand auf einen ebenen zurückzuführen, betrachte man eine zur Tunnelachse normal und von den Endpunkten des Tunnels genügend weit entfernt liegende Scheibe und denke sich in diesen Querschnitt ein Polarkoordinatensystem gelegt (Abb. 25), so daß der Ursprung mit der Projektion der Tunnelachse zusammenfällt und der Winkel φ von der Senkrechten

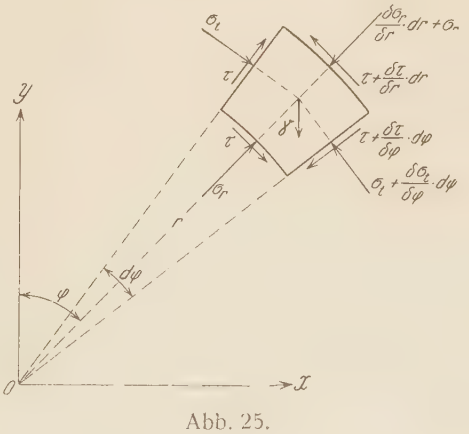

Abb. 25.

aus gemessen wird. Aus Abb. 25 erhält man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r + r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau}{\partial\varphi} - \sigma_t &= -r\gamma\cos\varphi \\ 2\tau + r\frac{\partial\tau}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_t}{\partial\varphi} &= r\gamma\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ 79.$$

Führt man eine Spannungsfunktion F ein, so lassen sich die Spannungen, wie man sich durch Differentiieren überzeugen kann, wie folgt darstellen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{2}{3}r\gamma\cos\varphi \\ \sigma_t &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \\ \tau &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{3}r\gamma\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ 80.$$

Genügen die Spannungen der Gleichung

$$\sigma_r + \sigma_t = \frac{K}{\sqrt{K-1}}\sqrt{\sigma_r\cdot\sigma_t - \tau^2} \quad \ldots\ 81$$

und den Randbedingungen, so kann die Aufgabe als gelöst betrachtet werden.

Führt man die Funktion

$$F = r^K \Sigma A_n \cos n\varphi \quad \ldots\ 82$$

ein, wobei die Koeffizienten A_n Parameter darstellen, die von den Randbedingungen abhängen, so kann man in bestimmten Fällen[1] eine Näherungslösung finden. Für den betrachteten Fall ist es jedoch schwierig, die Bedingungen für die Grenze der Fließzone festzustellen, weil ihre Form unbekannt ist. Immerhin ist die Annahme berechtigt, daß diese äußere Grenze der Fließzone eine Ellipse ist, wie aus folgender Überlegung hervorgeht.

Bezeichnet man mit A B (Abb. 26) eine aus aneinandergereihten Sandkörnchen gebildete Kurve, in der also keine Zugkräfte übertragen werden können und die dem äußern Druck widerstehen soll, ferner mit T und T + dT die tangentialen Kräfte, die in dem so gebildeten Gewölbe auftreten, mit P und P′ zwei unendlich benachbarte Punkte der Kurve A B, mit ds ein unendlich kleines Bogenstück derselben und schließlich mit σ_r und τ die angreifenden Spannungen, die in diesem Fall durch die erste und dritte Gleichung der Formelgruppe 21 gekennzeichnet werden, so erhält man mit Tangente und Radius des Punktes P als Projektionsachsen:

$$(T + dT)\cos d\varphi - T + \tau ds = 0$$
$$(T + dT)\sin d\varphi - \sigma_r ds = 0.$$

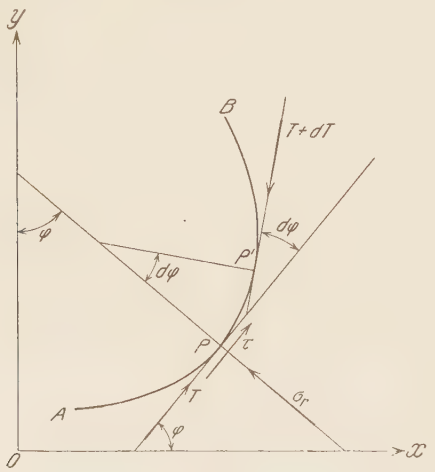

Abb. 26.

[1] Johnson: Calculation of the stability of earth dams, Second congress on large dams, Washington 1936.

Setzt man nun in diese Gleichungen die sich aus den Formeln ergebenden Werte für τ und σ_r ein und läßt die unendlich kleinen Werte zweiter Ordnung unberücksichtigt, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} dT &= \frac{p}{2}\frac{K-2}{K-1}ds\sin 2\varphi \\ Td\varphi &= \frac{p}{2(K-1)}ds\,[K + (K-2)\cos 2\varphi] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ 83.$$

Nach Elimination von ds ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\frac{-2(K-2)\sin 2\varphi\, d\varphi}{K + (K-2)\cos 2\varphi},$$

deren Integralgleichung lautet:

$$T = \frac{C}{\sqrt{K + (K-2)\cos 2\varphi}},$$

woraus man die Integrationskonstante C auf Grund der Überlegung ermittelt, daß T = pa sein muß, wenn man $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt, wobei p die senkrechte Hauptspannung und a den horizontalen Halbmesser der geschlossenen Kurve darstellt; denn aus Gründen der Symmetrie muß jeder Ast der Kurve die Hälfte des Druckes aushalten, also:

$$T = \frac{pa\sqrt{2}}{\sqrt{[K + (K-2)\cos 2\varphi]^3}};$$

setzt man diesen Wert in die zweite Gleichung der Gruppe 83 ein, so erhält man:

$$ds = \frac{2a(K-1)\sqrt{2}\,d\varphi}{\sqrt{[K + (K-2)\cos 2\varphi]^3}},$$

woraus man unter Berücksichtigung, daß

$$ds = \rho d\varphi$$

ist, die Gleichung:

$$\rho = \frac{2(K-1)a\sqrt{2}}{\sqrt{[K + (K-2)\cos 2\varphi]^3}}$$

erhält, die bekanntlich den Krümmungsradius der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(K-1)a^2} = 1$$

bezeichnet, in der die beiden Achsen den Quotienten

$$\frac{b}{a} = \sqrt{K-1}$$

bilden, was vorauszusehen war, weil beide Resultierende zugeordnete Durchmesser der Ellipse bilden, die durch die Gleichung

$$x^2\sigma_y + y^2\sigma_x = \sigma_x\sigma_y$$

gekennzeichnet ist.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß ein elliptisches Gewölbe sehr wohl imstande ist, der durch die Gleichungen 21 zum Ausdruck gebrachten Beanspruchung zu widerstehen, ohne daß dabei Zugkräfte auftreten. Jedoch bleibt die Frage offen, ob diese Ellipse die Grenze der Fließzone bildet, weil die Zahl der Unbekannten größer ist als die Anzahl

der Gleichungen, wie man aus folgender Überlegung ersieht.

Unter Benutzung der Formeln 36, 37, 38, 39 und 40 erhält man, wenn man für F die Funktion:

$$F = \frac{pc^2}{4}\left\{2\,\mathfrak{Cof}\,2\xi_o\,\xi + e^{-2\xi} + \cos 2\eta\right\} \quad . 84$$

einsetzt, die Spannungen um einen elliptischen Hohlraum, der sich unter dem innern gleichmäßigen Druck p befindet, wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\xi &= p - p\,\frac{\mathfrak{Cof}\,2\xi - \mathfrak{Cof}\,2\xi_o}{(\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta)^2}\,\mathfrak{Sin}\,2\xi\\ \sigma_\eta &= p - p\,\frac{\mathfrak{Sin}\,2\xi}{\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta}\left(1 + \frac{\mathfrak{Cof}\,2\xi_o - \cos 2\eta}{\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta}\right)\\ \tau &= p\,\frac{\mathfrak{Cof}\,2\xi - \mathfrak{Cof}\,2\xi_o}{(\mathfrak{Cof}\,2\xi - \cos 2\eta)^2}\,\sin 2\eta\end{aligned}\right\} \quad 84\,a.$$

Setzt man nun für $\xi = \xi_o$ ein, so erhalten diese Gleichungen die Form:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{\xi\xi = \xi_o} &= p\\ \sigma_{\eta\xi = \xi_o} &= p - 2\,p\,\frac{\mathfrak{Sin}\,2\xi_o}{\mathfrak{Cof}\,2\xi_o - \cos 2\eta}\\ \tau_{\xi = \xi_o} &= 0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 84\,b$$

und für $\xi \to \infty$ lauten die Werte:

$$\sigma_{\xi\xi \to \infty} = 0;\ \sigma_{\eta\xi \to \infty} = 0;\ \tau_{\xi \to \infty} = 0.$$

Bezeichnet man mit p_i den innern gleichförmigen Druck (Spannungskreis) und mit p die im Unendlichen wirkende größere Hauptspannung, so ergibt sich durch Superposition der Spannungen mit Hilfe der Formel 50 und der zweiten Gleichung der Gruppe 84b folgende Gleichung:

$$\sigma_{\eta\xi = \xi_o} = \frac{p}{m-1}\,\frac{m\,\mathfrak{Sin}\,2\xi_o + (m-2)\,(1 - e^{2\xi_o}\cos 2\eta)}{\mathfrak{Cof}\,2\xi_o - \cos 2\eta} - p_i - \frac{2\,\mathfrak{Sin}\,2\xi_o}{\mathfrak{Cof}\,2\xi_o - \cos 2\eta}\,p_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 84\,c.$$

Da aber ξ_o und p_i unbekannte Größen sind und keine weitern Gleichungen zur Verfügung stehen, ist die Lösung der Aufgabe unmöglich, es sei denn, daß man für ξ_o einen willkürlichen Wert annimmt oder ihn auf folgende Weise bestimmt. Führt man den Ansatz

$$\sum_o^\infty A_n(r)\cos n\varphi;\ (n = 1, 2, 3\ \ldots)$$

in 80 ein und berücksichtigt die Gleichung 81, so ist es möglich, eine Lösung in Reihendarstellung zu finden. Bedenkt man jedoch, daß die Bedingung 81 nicht linear ist, so kommt man zum Schluß, daß der angegebene Weg zu mühevollen Rechnungen führt.

Die Bestimmung der Grenze der Fließzone hat geringen Wert für den verfolgten Zweck dieser Untersuchung, da sich auf diese Weise höchstens die Raumdehnung bestimmen ließe, während es darauf ankommt, zu beweisen, daß ein Gleichgewichtszustand für den niedrigsten Reibungskoeffizienten auch für diesen Fall gewährleistet ist. Die angegebene Methode weiter zu verfolgen, erscheint deshalb nicht der Mühe wert, und der Zweck der Untersuchung läßt sich durch eine viel einfachere Überlegung erreichen, wenn man ausschließlich die Grenzen der Fließzone auf der Symmetrieachse und somit ihre äußersten Werte genau bestimmt.

Da beide Spannungen auf der Symmetrieachse äußerste Werte besitzen, müssen für $\varphi = 0$ die ersten Ableitungen

$$\frac{\partial\tau}{\partial\varphi} = \frac{\partial\sigma_t}{\partial\varphi} = 0$$

verschwinden, so daß die Gleichungen 79 einfach durch folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$\sigma_R + r\,\frac{\partial\sigma_R}{\partial r} - \sigma_T + r\gamma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 85.$$

(Dieselbe Gleichung hätte man als Gleichgewichtsbedingung am Element für $\varphi = 0$ erhalten können.)

Führt man eine Spannungsfunktion F ein, so erhalten die Spannungen folgende Werte, wie man sich durch Differentiieren leicht überzeugen kann.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_R &= \frac{1}{r}\,\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\gamma r}{2}\\ \sigma_T &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\\ \tau &= 0\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 85\,a.$$

Die Bedingung 81 erlaubt schließlich die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{K-1}{r}\,\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{K-1}{2}\,\gamma r = 0$$

aufzustellen. Nach zweimaliger Integration gelangt man zu der Gleichung:

$$F = \frac{C}{K}\,r^K + \frac{K-1}{c\,(K-3)}\cdot\gamma r^3,$$

womit die Spannungen bestimmt werden können. Wenn man für $r = a$ $\sigma_R = \sigma_{Ra}$ setzt, so lauten diese wie folgt:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_R &= \sigma_{Ra}\left(\frac{r}{a}\right)^{K-2} - \frac{\gamma a}{K-3}\left(\frac{r}{a}\right)^{K-2} + \frac{\gamma r}{K-3}\\ \sigma_T &= (K-1)\,\sigma_{Ra}\left(\frac{r}{a}\right)^{K-2} - (K-1)\,\frac{\gamma a}{K-3}\left(\frac{r}{a}\right)^{K-2} +\\ &\quad + (K-1)\,\frac{\gamma r}{K-3}\end{aligned}\right\} \quad . \quad 85\,b.$$

Dieselbe Lösung hätte man, ohne eine Spannungsfunktion einzuführen, finden können, wenn in Gleichung 85 $\sigma_T = (K-1)\,\sigma_R$ gesetzt und σ_R durch Integration festgelegt worden wäre.

Für den niedrigsten Reibungskoeffizienten $\mu = 0{,}35354$ erhält man (s. Formel 72)

$$\sigma_R = \frac{r}{a}\left(\sigma_{Ra} - \gamma a \ln\frac{r}{a}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 85\,c.$$

Für $\varphi = \pi$ ändern die Glieder, die γ enthalten, ihr Vorzeichen, so daß sich σ_R für irgendeinen Winkel φ zwischen

$$\sigma_R = \frac{r}{a}\left(\sigma_{Ra} \mp a\gamma \ln\frac{r}{a}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 85\,d$$

befinden muß, wobei das obere Zeichen für $\varphi = 0$, das untere Zeichen für $\varphi = \pi$ gilt.

Nun muß, wie aus den Gleichungen 79 zu ersehen ist, für

$$\frac{\partial\tau}{\partial\varphi} = -r\gamma\cos\varphi;\ \frac{\partial\tau}{\partial r} = \gamma\sin\varphi,$$

d. h. für $\tau = -r\gamma\sin\varphi + r\gamma\sin\varphi = 0$ der Einfluß von γ in der Formel 85b verschwinden, und σ_R erhält dann den durch Formel 58 gegebenen Wert, woraus sich entnehmen läßt, daß dieser Wert des Winkels φ eine Hauptrichtung darstellt. Dieses Ergebnis sowie die gefundenen Bedingungen auf der y-Achse beweisen, daß die Funktion 82 viele Parameter enthalten muß, damit man eine brauchbare Näherungslösung findet.

Bedenkt man nun, daß nach Formel 85c der maßgebende Wert der Fließzone senkrecht oberhalb des betrachteten Stollens oder Tunnels zu finden ist, so kommt man zu dem Schluß, daß Formel 85c den kleinsten Wert von σ_{Ra} zu bestimmen erlaubt, der überhaupt Gleichgewicht herbeizuführen vermag.

Die Summe der beiden Hauptspannungen

$$\sigma_R + \sigma_T = 3\frac{r}{a}\left(\sigma_{Ra} - \gamma a \ln\frac{r}{a}\right)$$

muß an der Grenze der Fließzone gleich der Summe der beiden ursprünglichen Hauptspannungen sein, d. h.

$$\frac{r}{a}\left(\sigma_{Ra} - \gamma a \ln\frac{r}{a}\right) = \frac{h-r}{2}\gamma,$$

und somit wird

$$\sigma_{Ra} = \frac{ha\gamma}{2r} - \frac{\gamma a}{2} + a\gamma \ln\frac{r}{a}.$$

Damit das zweite Glied den Höchstwert erreicht, muß $r = \frac{h}{2}$ sein, und die Spannung erhält den Wert

$$\sigma_{Ra} = a\gamma\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{h}{2a}\right).$$

Mit andern Worten: Damit überhaupt noch Gleichgewicht eintritt, darf σ_{Ra} nicht kleiner als der oben angegebene Wert werden.

Für $a = 3$ m, $\gamma = 2{,}5$ und $h = 1000$ m wird

$$\sigma_{Ra} = 4{,}215 \text{ kg/cm}^2.$$

Damit wäre der Beweis erbracht, daß auch in diesem Falle Gleichgewicht eintreten kann, wenn nur der Druck auf den Ausbau bei einer Teufe von 1000 m und $a = 3$ m, $\gamma = 2{,}5$ größer oder gleich 4,215 kg/cm² gewählt wird.

Für den allgemeinen Fall wird der kleinste Wert von σ_{Ra} gleich

$$\sigma_{Ra\,min} = \frac{\gamma a}{K-3} - \frac{K^2 - 5K + 7}{(K-1)(K-3)}\gamma h\left[\frac{2a}{(K-2)h}\right]^{K-2}.$$

Die Fließzone erreicht damit die Höhe

$$r = \frac{K-2}{2}h.$$

Für $K = 4$ erhält man

$$\sigma_{Ra\,min} = \gamma a\left(1 - \frac{a}{h}\right).$$

In Abb. 27 sind links die Fließzonen für $\mu = 0{,}35354$, $a = 3$ m, $\gamma = 2{,}5$, $h = 1000$ m und folgende Werte von σ_{Ra}: 4,215 kg/cm², 4,5 kg/cm², 6 kg/cm², 10 kg/cm² und 30 kg/cm² schaubildlich dargestellt. Die berechneten Scheitelhöhen sind $^1/_2\,h$, $^1/_5\,h$, $^1/_{10}\,h$, $^1/_{22}\,h$ und $^1/_{100}\,h$ (abgerundete Zahlen). Rechts sind die Hauptspannungssummen dargestellt. Man sieht, daß σ_{Ra} nicht kleiner als 4,215 kg/cm² sein kann, weil sonst die Fließzone eine offene Kurve sein müßte, denn $3\sigma_R$ kann niemals die ursprüngliche Hauptspannungssumme erreichen. Da für $\sigma_{Ra} = \gamma h$ die Fließzone mit dem Ringausbau übereinstimmt, also ein Kreis ist, und für

$$a\gamma\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{h}{2a}\right) < \sigma_{Ra} < \gamma h$$

dieselbe eine geschlossene Kurve darstellt, während für

$$\sigma_{Ra} < a\gamma\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{h}{2a}\right)$$

die Fließzone offen sein muß, so liegt es auf der Hand, mangels genauerer Kenntnis ihrer Gestalt die Fließzone näherungsweise als eine Ellipse zu betrachten und den Stollen in den untern Brennpunkt zu legen.

Unter dieser Annahme sind in Abb. 27 die Fließzonen gezeichnet worden, wobei man für die numerische Exzentrizität und für den Parameter p, wenn man mit A und B die durch Formel 85c gegebenen äußersten Werte bezeichnet, folgende Gleichungen gesetzt hat:

$$\varepsilon = \frac{A-B}{A+B} \quad p = \frac{2AB}{A+B}.$$

Die Gleichung der Ellipse wird dann durch folgende Formel bestimmt:

$$b = \frac{2AB}{A+B-(A-B)\cos\varphi} \quad \ldots\ldots 86.$$

Hierbei stellt b den vom Ursprung aus gemessenen Leitstrahl dar.

In rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt, lautet die Gleichung

$$\frac{4\xi^2}{(A+B)^2} + \frac{\eta^2}{AB} = 1 \quad \ldots\ldots 86a.$$

Aus Abb. 27 ist ersichtlich, daß eine kleine Änderung von σ_{Ra} einen ungeheuer starken Einfluß auf die Abmessungen der Fließzone ausübt. Dieser Umstand zeigt unmittelbar, daß die genaue Bestimmung der Form der Fließzone zwecklos ist, denn der Spannungszustand in der nächsten Umgebung des Stollens ist von ihr unabhängig und wird nur durch die Spannung σ_{Ra} sowie durch die Gleichungen 79 bestimmt, deren äußerste Werte bekannt sind.

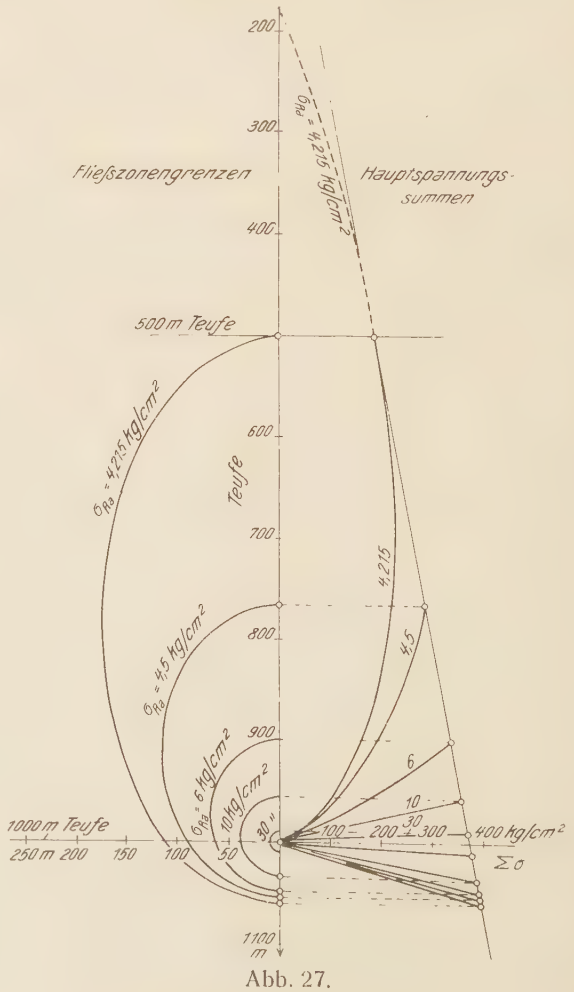

Abb. 27.

Handelt es sich um ein Medium mit Kohäsion, so gelten selbstverständlich sämtliche ausgeführten Berechnungen, wenn man statt der Reaktion σ_{Ra} des Ringausbaus die elastische Reaktion des Mediums nach erfolgter Wölbung (wenn es nicht zertrümmert wurde) setzt. In diesem Falle muß man mit drei Zonen rechnen, nämlich 1. der elastischen Zone außerhalb der Fließzone, 2. der Fließzone, 3. der elastischen Zone am Stoß. Wahrscheinlich muß man in der Praxis mit vier Zonen rechnen. Die Zone am Stoß selbst kann man als Zertrümmerungszone bezeichnen, da infolge der Unregelmäßigkeit der Streckenform diejenigen Gebirgsteile, die innerhalb der durch Formel 51 bestimmten Ellipse liegen, entspannt und zertrümmert werden. Weiterhin kann man mit einer Zone rechnen, die sich anfänglich im plastischen Zustand befindet, sich jedoch durch das Vordringen soweit entspannt, daß die Schubspannungen geringer als die Bruchschubspannung werden und die somit (soweit sie nicht zertrümmert wurde) einen bestimmten Widerstand zu leisten imstande ist. Dieser Widerstand kann mit σ_{Ra} bezeichnet werden. Außerhalb dieser Zone befindet sich nun die eigentliche Fließzone, d. h. eine Zone, in der die Spannungen mit der Entfernung zunehmen. Schließlich müßte sich noch außerhalb der Fließzone die elastische Zone befinden, in der die tangentiale Spannung mit zunehmender Entfernung abnimmt.

Man kann annehmen, daß sich ein ringförmiger nachgiebiger Ausbau bei Medien mit Kohäsion glänzend bewähren muß, da er die Entspannung erlaubt und doch eine Zertrümmerung vermeidet, so daß die eigenartige Spannungsverteilung, die in diesem Kapitel eingehend untersucht worden ist, zustande kommen und somit in kurzer Zeit Gleichgewicht eintreten kann. Sollte es sich aber um Tunnelbauten handeln, die, in Ton getrieben, sich mehrere 1000 m unterhalb der Oberfläche befinden, so wird es wohl zweckmäßig sein, eine Wandung zu bauen, die 40 oder 50 kg/cm² Druck aushält, und den Außendruck durch Anbringen von Schlitzen so zu regeln, daß er die vorher bestimmte Grenze nicht überschreitet. Bei 3000 m Teufe wird die ursprüngliche Summe zweier Hauptspannungen wahrscheinlich nicht kleiner als 1000 bis 1200 kg/cm² sein.

Es wäre unklug, einen dichten Ringausbau aufzuführen, weil dann die Druckverhältnisse sehr ungünstig ausfallen würden. Läßt man den Druck auf 40 kg/cm² sinken, so erreicht die Fließzone bei $a = 3$ m (eingleisiger Tunnel), $\gamma = 2{,}8$, $h = 3000$ m, $\mu = 0{,}35354$ einen Durchmesser von rd. 60 m. Die Materialmenge, die entfernt werden muß, kann auf 5 m³ geschätzt werden, also kaum $^1/_6$ der anfänglich entfernten Menge. Anderseits muß man aber bedenken, daß die Tunnelwandungen eine geringere Mächtigkeit haben können, also von Anfang an weniger Material zu entfernen ist.

Spannungszustand im geschichteten Gebirge.

Im Kohlenbergbau treffen die im vorigen Abschnitt gemachten Annahmen (homogenes Gebirge) nicht zu, weil die verschiedenen Schichten, die in verschiedenen Zeiten zur Ablagerung gelangt sind, nicht notwendigerweise dieselbe Zusammensetzung aufzuweisen brauchen. Da sie sich unter wechselnden Strömungsverhältnissen abgelagert haben und aus verschiedenen Gegenden stammen können, müssen sie sich vielmehr physikalisch in bezug auf Korngröße, Zement sowie elastische und plastische Eigenschaften merklich unterscheiden.

Vom Standpunkte dieser Untersuchungen aus betrachtet, kann ein Kohlenflöz nicht dieselben Eigenschaften wie ein Sandstein besitzen, und dieser wiederum wird sich erheblich von einer Tonbank unterscheiden. Zur Fortsetzung der Untersuchungen ist es daher notwendig, mit begrenzten Medien zu arbeiten, damit die Annahmen wenigstens angenähert den wirklichen Verhältnissen entsprechen.

Bekanntlich lagern sich die verschiedenen Schichten (in begrenzter Ausdehnung) so, daß ihre Grenzflächen als parallel angesehen werden dürfen. Im folgenden soll angenommen werden, daß die verschiedenen Schichten von streng parallelen Ebenen begrenzt werden, so daß die Mächtigkeit der zu behandelnden Schicht im ganzen Felde eine Konstante ist. Anderseits soll vorausgesetzt werden, daß die für den verfolgten Zweck in Betracht kommenden Eigenschaften (μ, E, m) innerhalb der festgelegten Grenzen konstant sind und erst an den Grenzen selbst sprunghaft andere Werte annehmen, die wiederum innerhalb eines bestimmten Bereiches als konstant anzusehen sind.

Um den Spannungszustand festzulegen, gehe man von der Annahme aus, daß eine waagrechte Strecke in eine waagrechte Tonschicht getrieben wurde, deren Mächtigkeit etwas geringer als die Höhe der Strecke ist (s. Abb. 28). Ferner sei angenommen, daß die Strecke einen gewöhnlichen Türstockausbau besitzt, so daß der Ton Gelegenheit hat, in die Strecke zu fließen und sich auf diese Weise zu entspannen. Die oben und unten anstehenden Schichten sollen Sandsteinschichten mit hoher Kohäsion und großer Mächtigkeit sein, so daß sie bei gleicher Hauptspannungssumme als starr gegenüber der Tonschicht angesehen werden dürfen.

Da sich die Schichten in bezug auf die Abmessungen des Hohlraumes sehr weit erstrecken, ist es zulässig, sie in horizontaler Richtung als unendlich

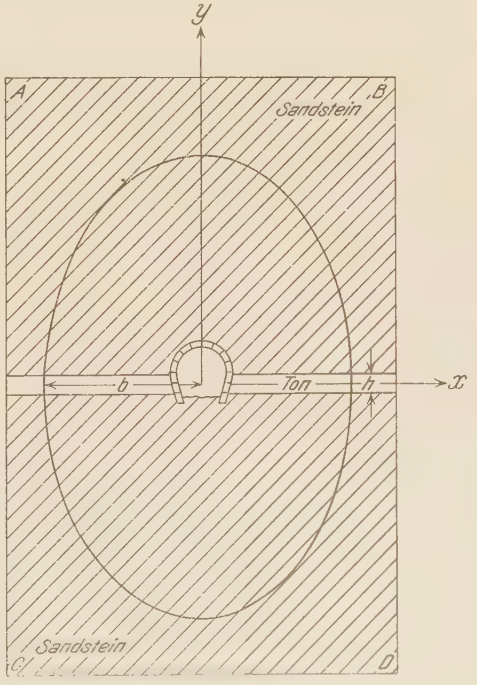

Abb. 28.

ausgedehnt zu betrachten, so daß eine normal zur Stollenachse gelegene senkrechte Scheibe die Aufgabe auf eine solche in zwei Dimensionen zurückführt und somit vereinfacht. Selbstverständlich müssen aus Symmetriegründen rechtwinklige Koordinaten eingeführt werden, und zwar so, daß die x-Achse in der Symmetrieebene der Tonschicht und die y-Achse in der senkrechten Symmetrieebene des Stollens zu liegen kommt. Da die Mächtigkeit der Tonschicht, verglichen mit der Teufe, sehr gering ist, kann man ohne weiteres das Eigengewicht vernachlässigen, wodurch alle Glieder, die γ enthalten, verschwinden müssen.

Der bis jetzt verfolgte Weg, die Spannungen mit Hilfe der Spannungsfunktion F zu ermitteln, ist mit großen Schwierigkeiten verbunden, da die Bedingung 81 eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, zweiten Grades darstellt, deren Lösung sich nur schwer bestimmen läßt.

Zweckmäßiger ist es, den von Hartmann[1] eingeschlagenen Weg zu verfolgen, um die Lösung, die er angibt, zu erhalten. Setzt man in die Formeln 28 für z die Veränderliche y und für y die Veränderliche x ein, wodurch erreicht wird, daß φ den Winkel der Hauptdruckrichtung (Richtung der größten Spannung) mit der x-Achse darstellt, weil jetzt die x-Achse die Symmetrieachse ist, und führt diese Formeln in die Grundgleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}&=0\\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau}{\partial x}&=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 87$$

ein, so erhält man, wenn man für σ die neue Veränderliche z durch den Ansatz

$$\sigma = ce^{z\cdot \operatorname{tg}\varrho}$$

ersetzt, folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}&\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\rho\cos 2\varphi\frac{\partial z}{\partial x}-2\cos\rho\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\\ &\quad+\sin\rho\sin 2\varphi\frac{\partial z}{\partial y}+2\cos\rho\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\\ &\frac{\partial z}{\partial y}-\sin\rho\cos 2\varphi\frac{\partial z}{\partial y}+2\cos\rho\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ &\quad+\sin\rho\sin 2\varphi\frac{\partial z}{\partial x}+2\cos\rho\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0.\end{aligned}$$

Damit φ in beiden Gleichungen nur von einer Veränderlichen abhängig wird, vervielfältige man die erste der Gleichungen mit $\cos 2\varphi$, die zweite mit $\sin 2\varphi$. Zählt man beide Gleichungen zusammen, so erhält man die erste und in entsprechender Weise die zweite der folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial z}{\partial x}\cos 2\varphi+\frac{\partial z}{\partial y}\sin 2\varphi+\sin\rho\frac{\partial z}{\partial x}+2\cos\rho\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\\ &-\frac{\partial z}{\partial x}\sin 2\varphi+\frac{\partial z}{\partial y}\cos 2\varphi-\sin\rho\frac{\partial z}{\partial y}+2\cos\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0\end{aligned}\right\} \quad 88.$$

Um den Spannungszustand für den gegebenen Fall zu bestimmen, bedenke man, daß die zwei Grenzflächen parallel zur x-Achse verlaufen. Die Hauptspannungen müssen die Winkel $\pm\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\rho}{2}\right)$ in irgendeinem Punkte mit denselben bilden, da die Grenzflächen Gleitflächen darstellen; mit andern Worten, der Winkel φ, den die Spannungstrajektorie mit der x-Achse bildet, muß unabhängig von x, also ausschließlich eine Funktion von y sein.

Für diesen Fall, $\varphi = f(y)$, ergibt sich aus den Gleichungen 88

$$\left.\begin{aligned}Cy &= 2\varphi\sin\rho-\sin 2\varphi+C_2\\ z\cos\rho &= \cos 2\varphi+Cx+C_1\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 89,$$

und die Spannungen erhalten die Werte

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= ce^{\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos\varrho}(\cos 2\varphi+Cx+C_1)}(1+\sin\rho\cos 2\varphi)-c_1\\ \sigma_y &= ce^{\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos\varrho}(\cos 2\varphi+Cx+C_1)}(1-\sin\rho\cos 2\varphi)-c_1\\ \tau &= ce^{\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos\varrho}(\cos 2\varphi+Cx+C_1)}\sin\rho\sin 2\varphi\end{aligned}\right\} \quad 90.$$

Um die Konstanten zu bestimmen, ziehe man in Betracht, daß die Spannung am Stoß bei kohäsionslosem Medium gleich σ_a gesetzt worden ist. Besitzt das Medium Kohäsion, so wird σ_a durch diesen Wert dargestellt, solange der Widerstand des Ringausbaus geringer als die Kohäsion ist, weil dann die Grenze zwischen dem elastischen und dem plastischen Medium durch den Wert der Kohäsion bestimmt wird.

Man bedenke jedoch, daß der Widerstand am Stoß keine Konstante sein kann, sondern daß

$$\text{Widerstand} = \sigma_a(1+\sin\rho\cos 2\varphi)\,e^{\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos\varrho}\cos 2\varphi}$$

sein muß; somit müßte $C_1 = -Ca$ sein, und man erhält

$$\sigma_x = \sigma_a(1+\sin\rho\cos 2\varphi)\,e^{\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos\varrho}[\cos 2\varphi+C(x-a)]}.$$

Zur Bestimmung des Wertes der Konstanten C sei daran erinnert, daß in den Gleichungen 89 die Mächtigkeit der Tonschicht nicht vorkommt, ein Umstand, der ahnen läßt, daß C eine Funktion von h sein wird. Da die erste der Gleichungen 89 eine der Gleichungen der Spannungstrajektorie darstellt, so kann man schließen, daß mit Hilfe der Spannungstrajektorien die Konstante C bestimmt werden kann. Wie bereits gesagt, stellt φ die Hauptdruckrichtung dar; es muß also folgende Beziehung gelten:

$$\frac{dy}{d\varphi}:\frac{dx}{d\varphi}=\operatorname{tg}\varphi$$

oder auch $\frac{dx}{d\varphi}=\frac{2(\sin\rho-\cos 2\varphi)}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\frac{1}{C}$.

Die Integration liefert

$$Cx = (\sin\rho-1)\ln\sin^2\varphi-2\cos^2\varphi+\text{Konst.}$$

Eine der Spannungstrajektorien in Parameterdarstellung lautet somit:

$$\left.\begin{aligned}Cy &= 2\varphi\sin\rho-\sin 2\varphi+C_2\\ Cx &= 2(\sin\rho-1)\ln\sin\varphi-\cos 2\varphi+\text{Konst.}\end{aligned}\right\} \quad \ldots 91.$$

Da nun die x-Achse eine Symmetrieachse ist, so muß, je nachdem die größere oder kleinere Hauptspannung mit der x-Achse übereinstimmt, für $y=0$ $\varphi=0$ bzw. $\varphi=\frac{\pi}{2}$ sein, was aber nur dann möglich ist, wenn

$$C_2'=0, \text{ bzw. } C_2''=-\pi\sin\rho$$

ist.

[1] Hartmann: Über die Integration der Differentialgleichungen des ebenen Gleichgewichtszustandes für den allgemeinplastischen Körper (s. Nádai, Handbuch der Physik, VI).

Somit wird es notwendig sein, gleichzeitig die zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} C'y &= 2\varphi \sin\rho - \sin 2\varphi \\ C''y &= (2\varphi - \pi)\sin\rho - \sin 2\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad 91a$$

in Betracht zu ziehen.

Um den Wert von C zu bestimmen, bedenke man, daß für $y = -h$ bzw. $y = +h$, d. h. an den Wänden, die Hauptspannung den Winkel $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right)$ oder auch $-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right)$ mit der x-Achse bilden muß. Läßt man den ersten Winkel $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right)$ stetig wachsen, so muß er nach einer Drehung um $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2}\right)$ den Wert $\frac{\pi}{2}$ erreichen, womit bewiesen wäre, daß dieser Wert für $C_2'' = -\pi \sin\rho$ gilt, und man erhält

$$C'' = \frac{(\pi + 2\rho)\sin\rho + 2\cos\rho}{2h}$$

Läßt man nun den zweiten Winkel $-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right)$ stetig wachsen, so erhält man nach einer Drehung um $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right)$ den Wert Null. Dieser Wert ist in die erste Gleichung einzusetzen, und man erhält

$$C' = \frac{(2\rho - \pi)\sin\rho + 2\cos\rho}{2h}.$$

Damit wäre der Wert sämtlicher Konstanten bestimmt.

Um die zweite Spannungstrajektorie zu erhalten, muß die Beziehung

$$\frac{dy}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi} = -\operatorname{ctg}\varphi$$

gesetzt werden, oder

$$C\frac{dx}{d\varphi} = 2\operatorname{tg}\varphi\,(\sin\rho - \cos 2\varphi)$$

und nach erfolgter Integration

$$Cx = 2(1 + \sin\rho)\ln\cos\varphi - \cos 2\varphi + \text{Konst.}$$

Die Gleitlinien können bestimmt werden, wenn man

$$\frac{dy}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi} = \operatorname{tg}\left[\varphi \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right)\right]$$

setzt. Da aber

$$\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4} + \varphi - \frac{\rho}{2}\right] = \frac{1 + \sin(2\varphi - \rho)}{\cos(2\varphi - \rho)}$$

ist, so erhält man

$$C\frac{dx}{d\varphi} = \frac{2(\sin\rho - \cos 2\varphi)\cos(2\varphi - \rho)}{1 + \sin(2\varphi - \rho)}.$$

Führt man die Multiplikation im Zähler aus und teilt durch den Nenner, so kommt man zu der Formel

$$C\frac{dx}{d\varphi} = -2\cos\rho + 2\sin 2\varphi.$$

Durch Integration erhält man

$$Cx = -2\varphi\cos\rho - \cos 2\varphi + \text{Konst.}$$

Für die andere Gleitlinie ergibt sich

$$Cx = 2\varphi\cos\rho - \cos 2\varphi + \text{Konst.}$$

Zusammenfassend würden die Spannungstrajektorien und Gleitlinien für den Fall, daß die größere Hauptspannung den Winkel $\frac{\pi}{2}$ mit der x-Achse bildet, folgenden Gleichungen entsprechen:

$$\left.\begin{aligned} y_{1234} &= 2\frac{(2\varphi - \pi)\sin\rho - \sin 2\varphi}{(\pi + 2\rho)\sin\rho + 2\cos\rho}h \\ x_1 &= 2\frac{2(\sin\rho - 1)\ln\sin\varphi - \cos 2\varphi}{(\pi + 2\rho)\sin\rho + 2\cos\rho}h + \text{Konst.} \\ x_2 &= 2\frac{2(\sin\rho + 1)\ln\cos\varphi - \cos 2\varphi}{(\pi + 2\rho)\sin\rho + 2\cos\rho}h + \text{Konst.} \\ x_{34} &= 2\frac{+2\varphi\cos\rho - \cos 2\varphi}{(\pi + 2\rho)\sin\rho + 2\cos\rho}h + \text{Konst.} \end{aligned}\right\} \quad 92$$

und für den Fall, daß die größere Hauptspannung mit der x-Achse übereinstimmt

$$\left.\begin{aligned} y_{1234} &= 2\frac{2\varphi\sin\rho - \sin 2\varphi}{(2\rho - \pi)\sin\rho + 2\cos\rho}h \\ x_1 &= 2\frac{(\sin\rho - 1)\ln\sin^2\varphi - \cos 2\varphi}{(2\rho - \pi)\sin\rho + 2\cos\rho}h + \text{Konst.} \\ x_2 &= 2\frac{2(1 + \sin\rho)\ln\cos\varphi - \cos 2\varphi}{(2\rho - \pi)\sin\rho + 2\cos\rho}h + \text{Konst.} \\ x_{34} &= 2\frac{\mp 2\varphi\cos\rho - \cos 2\varphi}{(2\rho - \pi)\sin\rho + 2\cos\rho}h + \text{Konst.} \end{aligned}\right\} \quad 92a.$$

Die Indices 1 und 2 stellen Spannungstrajektorien und die Indices 3 und 4 Gleitlinien[1] dar. Die Gleichungen 92 haben Gültigkeit für die Werte

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{4} + \frac{\rho}{2}$$

und die Gleichungen 92a gelten für die Werte

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} < \varphi < \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}.$$

In Abb. 29 sind die Spannungstrajektorien (gestrichelt) und die Gleitlinien (voll ausgezogen) für den ersten Fall und in Abb. 30 für den zweiten Fall für $\rho = 30^0$ graphisch dargestellt.

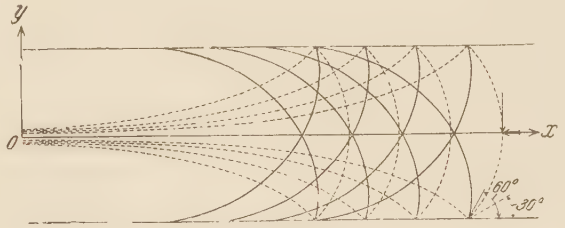

Abb. 29.

Um nun den für den Bergbau in Betracht kommenden Wert C_2 zu bestimmen, gehe man von folgender Überlegung aus. Da die Schicht horizontal liegt, muß die größere der Hauptspannungen senkrecht dazu verlaufen, also den Winkel $\frac{\pi}{2}$ mit der x-Achse bilden.

Wird nun ein Stollen in die Tonbank getrieben, so sinkt σ_x auf einen Mindestwert am Stoß selbst; zwangsläufig muß dann auch σ_y sinken, so daß sich eine teilweise entspannte Zone um den Stollen bildet, die im Hangenden und Liegenden innerhalb der durch Formel 51 gegebenen Ellipse sogar zu Rißbildungen führen kann.

[1] Diese Formeln sind von Nádai im Handbuch der Physik, Band VI veröffentlicht worden, jedoch enthalten sie leider mehrere Druckfehler.

Anderseits war aus den Formeln 53 zu ersehen, daß σ_η für $\eta = \frac{\pi}{2}$ den Höchstwert erreichte, der jetzt durch den Wert von σ_y bestimmt wird. Wenn also der Ton einen neuen Gleichgewichtszustand erreicht hat, so muß die größere Hauptspannung den Winkel $\frac{\pi}{2}$ mit der x-Achse bilden, wodurch bewiesen wäre, daß ausschließlich die Gleichungen 92 in Betracht kommen und die Spannungen folgende Form erhalten

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_a (1 + \sin\rho \cos 2\varphi) \cdot \\
&\quad \cdot e^{\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos\varrho}\left[\cos 2\varphi + \frac{(2\varrho+\pi)\sin\varrho + 2\cos\varrho}{2}\frac{x-a}{h}\right]} \\
\sigma_y &= \sigma_a (1 - \sin\rho \cos 2\varphi) \cdot \\
&\quad \cdot e^{\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos\varrho}\left[\cos 2\varphi + \frac{(2\varrho+\pi)\sin\varrho + 2\cos\varrho}{2}\frac{x-a}{h}\right]} \\
\tau &= \sigma_a \sin\rho \sin 2\varphi) \cdot \\
&\quad \cdot e^{\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos\varrho}\left[\cos 2\varphi + \frac{(2\varrho+\pi)\sin\varrho + 2\cos\varrho}{2}\frac{x-a}{h}\right]}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \; 93.$$

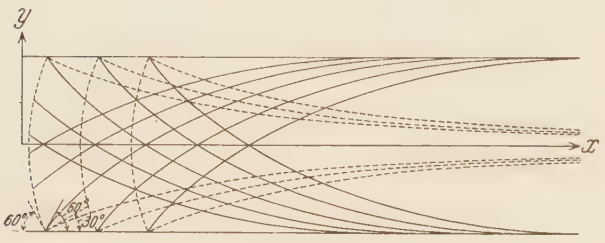

Abb. 30.

Um ein Bild über den Spannungszustand zu erhalten, ist es zweckmäßig, die Spannung in zwei Faktoren zu zerlegen:

$$\sigma_x = \sigma_a (1 + \sin\rho \cos 2\varphi)\, e^{\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos\varrho}\cos 2\varphi} \cdot e^{\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos\varrho}\frac{(2\varrho+\pi)\sin\varrho + 2\cos\varrho}{2}\frac{x-a}{h}}.$$

Der erste Faktor hängt ausschließlich vom Winkel φ ab und somit von y, während der zweite eine Funktion von x ist. Setzt man x = a so wird der zweite Faktor gleich eins, und die Spannungen erhalten für den ungünstigsten Fall, also K = 3 oder $\rho = 19^0\,30'$, folgende Werte:

$$\sigma_x = \sigma_a (1 + 0{,}334 \cos 2\varphi)\, e^{0{,}376 \cos 2\varphi},$$
$$\sigma_y = \sigma_a (1 - 0{,}334 \cos 2\varphi)\, e^{0{,}376 \cos 2\varphi},$$
$$\tau = 0{,}334\, \sigma_a \sin 2\varphi\, e^{0{,}376 \cos 2\varphi}.$$

In Abb. 31 sind die Werte dieser Spannungen eingetragen (σ_x punktiert, τ gestrichelt und σ_y voll ausgezogen). Man sieht sofort, daß der Höchstwert sämtlicher Komponenten bei y = a oder $\varphi = 35^0\,15'$ zu finden ist.

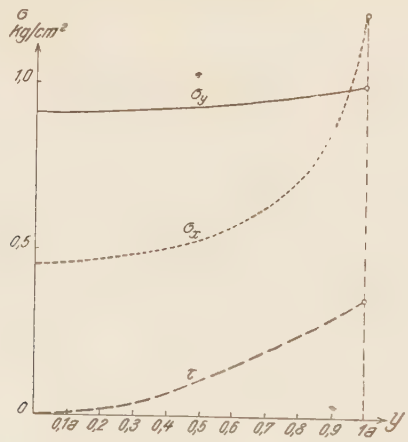

Abb. 31.

Wie bereits gesagt, hängt die Fließzone von der Hauptspannungssumme ab. Diese lautet für $\mu = 0{,}35354$, $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Sigma\sigma = 2\,\sigma_a \cdot e^{0{,}59\,\frac{x-a}{h}\,\cdot\,0{,}376}.$$

In Abb. 32 sind die Werte der Hauptspannungssumme beim Grenzzustand für a–h schaubildlich dargestellt.

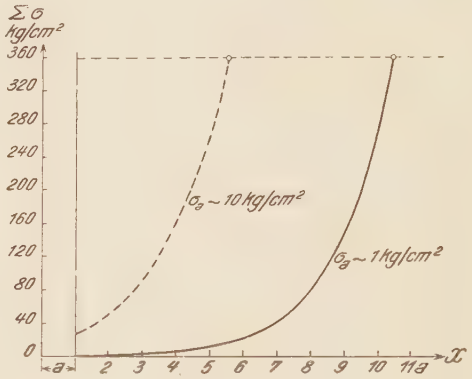

Abb. 32.

Bei 1000 m Teufe und $\gamma = 2{,}4$ hatte die ursprüngliche Hauptspannungssumme den Wert 360 kg/cm², so daß sich die Fließzone (für den ungünstigsten Fall $\mu = 0{,}35354$, wobei h = a gesetzt wurde) in der Tonbank bis zu einer Entfernung von nahezu 10,5 a erstreckt. Für $\sigma_a = 10$ kg/cm² reicht sie bis zu rd. 5,5 a, ein Umstand, der wiederum den Beweis liefert, daß der Widerstand am Stoß oder, was dasselbe ist, die dem Medium zugehörige Kohäsion von maßgebender Bedeutung ist. Anderseits übt aber auch die Mächtigkeit der Tonschicht einen großen Einfluß auf den Spannungszustand aus, da sie im Exponenten auftritt. In Abb. 33 sind die Spannungszustände für verschiedene Mächtigkeiten der Tonschicht schaubildlich wiedergegeben.

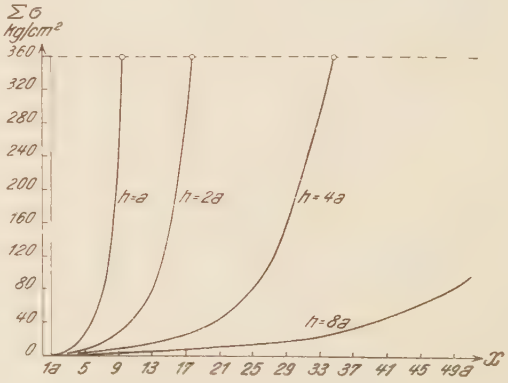

Abb. 33.

Man sieht sofort, daß für h = 8a die ursprüngliche Hauptspannungssumme außerhalb der Abbildung erreicht wird; dies liefert den Beweis, daß bei zunehmender Mächtigkeit der Tonschicht der Spannungszustand sich immer mehr dem des vorigen Kapitels nähert, bis er schließlich allein durch die im vorigen Abschnitt gefundenen Gesetze dargestellt

wird. In Abb. 34 sind die Werte der Hauptspannungen (σ_{max} »oben« und σ_{min} »unten«) für $\rho = 19^0\ 30'$ graphisch dargestellt.

Zusammenfassend kann man sagen, daß auch die geringste Tonschicht einen maßgebenden Einfluß auf den Spannungszustand ausübt, weil sie infolge ihrer geringen Kohäsion und hohen Plastizität zunächst Entspannung an den Stößen verursacht, die eine teilweise entspannte Trompetersche Zone mit sich führt, so daß bei gleichem Wert der Poissonschen Konstanten die Zertrümmerungszone in First und Sohle viel größer als im rein elastischen Gebirge wird. Dieser Umstand erklärt den scheinbaren Widerspruch der Berechnungen bei mächtigen Kohlenflözen, die dünne Tonschichten enthalten. Die Zertrümmerungszone wird bei weitem größer, als diejenige, die durch Formel 51 bestimmt wird. In Abb. 28 ist die Zertrümmerungszone graphisch dargestellt.

Spannungszustand im gestörten Gebirge.

Der Spannungszustand im ungestörten Gebirge wird durch die Formel 1, welche die größte Hauptspannung darstellte, festgelegt. Im gestörten Gebirge kann die größte Hauptspannung in einem Punkte auch Funktion der Poissonschen Konstanten oder des Reibungskoeffizienten sein, wie aus folgender Überlegung hervorgeht.

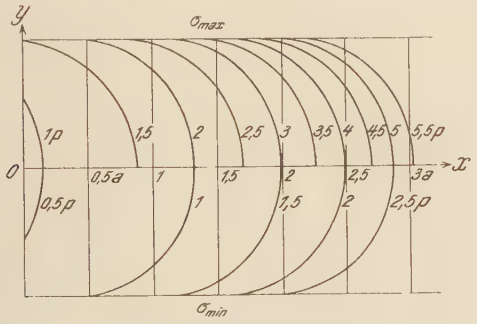

Abb. 34.

Spannungszustand bei waagrechter Oberfläche.

War das Gebirge horizontalen tektonischen Druckkräften ausgesetzt (tangentiale Kräfte), so konnte die ursprüngliche waagrechte Hauptspannung einen Wert p_h erreichen, der im elastischen Gebirge durch die Gleichung:

$$p_h = (m - 1)\, p_s$$

ausgedrückt werden kann, worin p_s die ursprüngliche senkrechte Hauptspannung bezeichnet. Für plastische Medien gilt dieselbe Formel, wenn man an Stelle von m K einsetzt (Formel 54). Die Gleichungen 10 und 28 können ebenfalls für diesen Fall unverändert angewendet werden, wenn man an Stelle von p den Wert p_h einsetzt. Selbstverständlich braucht p_h nicht eine streng horizontale Richtung zu besitzen, sondern kann je nach der Richtung der tektonischen Kräfte eine beliebige Neigung haben.

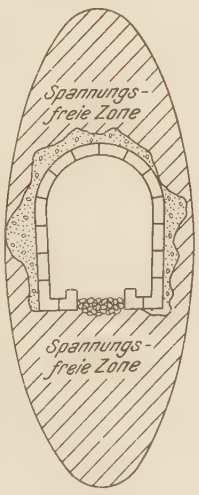

Abb. 35.

Die Druckverhältnisse um einen Hohlraum im elastischen Gebirge werden günstiger, weil die spannungsfreie Zone (s. Abb. 35) statt senkrecht auf dem Ausbau zu lasten, seitlich vom Gebirge getragen wird. In plastischen Medien ist die Wirkung ungünstiger, weil die Fließzone höhere Werte annimmt, da man mit höhern Spannungen zu rechnen hat, so daß für gleiche Bauzeiten höhere Drücke auf den Ausbau zu erwarten sind. Im geschichteten Gebirge können gewisse Schichten mit niedrigen Reibungskoeffizienten, wie z. B. Ton oder Kohle, die während der Wirkung der tektonischen Kräfte zum Fließen kamen, unter hohem Druck stehen, so daß beim Anfahren derselben besondere Vorsichtsmaßregeln getroffen werden müssen. War das Gebirge Torsionskräften unterworfen, so kann eine der horizontalen Hauptspannungen gleich Null sein, weil die Torsion bekanntlich Zugspannungen erzeugt, welche die ursprüngliche Druckspannung zum Verschwinden bringen können.

Wird eine Strecke normal zu der Hauptspannung aufgefahren, deren Wert gleich Null ist, so nimmt die zweite Gleichung der Gruppe 40 die Form:

$$\sigma_n = \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\,\xi_o + 1 - e^{2\,\xi_o} \cos 2\,\eta}{\mathfrak{Cof}\, 2\,\xi_o - \cos 2\,\eta}$$

an, d. h., die Zugkräfte in den Hauptscheiteln verschwinden nur, wenn $\xi_o = 0$ ist, so daß sich die im Hangenden der Strecke auftretenden Brüche theoretisch bis ins Unendliche fortpflanzen müssen, ein Umstand, welcher die beim Anfahren einer Verwerfung beobachteten Schwierigkeiten erklärt.

Bei den angestellten Betrachtungen wurde die Oberfläche stets als waagrecht angenommen, weil in großen Tiefen ihre Neigung gegen die Horizontale vernachlässigt werden kann.

Spannungszustand bei geneigter Oberfläche.

In geringen Tiefen können im geschichteten Gebirge durch das Auffahren einer Strecke in tonigen Schichten besonders gefährliche Spannungen ausgelöst werden, wie aus folgender Überlegung hervorgeht.

Bezeichnet man mit σ_x die horizontale Spannung in der Tonschicht (s. Abb. 36), mit σ_y die senkrechte Spannung, mit h die Mächtigkeit der Tonschicht und mit y die senkrechte Entfernung zwischen der Oberfläche und einem Punkte in der Tonschicht, dessen Abszisse gleich x ist, wobei der Koordinatenursprung am Ausbiß des Tones gewählt wird, so kann der senkrecht auf die Tonschicht wirkende Druck durch die Gleichung

$$\sigma_y = \gamma y$$

gekennzeichnet werden.

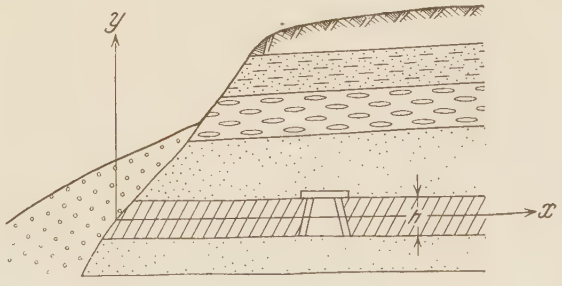

Abb. 36.

Da der Abhang durch Erosion der Schichten entstanden ist, stellte σ_y während der Ablagerung dieser Schichten die größere Hauptspannung in der Ton-

schicht dar, und somit war die kleinere Hauptspannung

$$\sigma_x = \frac{\gamma y}{K-1}.$$

Sobald nun die Tonschicht durch die Erosion freigelegt wurde, fing der Ton im Ausbiß an zu fließen, so daß der Spannungszustand in dieser Tonschicht grundlegend verändert wurde.

Zur Ermittlung der Gleichgewichtsbedingungen muß man den Wert von σ_y aus Gleichung 93 für $\varphi = \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\rho}{2}\right)$ entnehmen. Er lautet:

$$\sigma_y = \sigma_a \cos^2\rho\, e^{\operatorname{tg}^2\varrho} \cdot e^{\operatorname{tg}\varrho\,[(2\varrho+\pi)\operatorname{tg}\varrho+2]\frac{x}{2h}} \cdot \frac{a}{}.$$

Da nun der Koordinatenursprung am Ausbiß liegt, setze man für $x = 0$ $\sigma_y = \sigma_b$, und man erhält

$$\sigma_y = \sigma_b \cdot e^{\operatorname{tg}\varrho\,[(2\varrho+\pi)\operatorname{tg}\varrho+2]\frac{x}{2h}} \quad \ldots\ldots 94,$$

wobei σ_b die Belastung der Schutthalde darstellt, oder, wenn das Medium Kohäsion besitzt, die Summe beider Widerstände.

Man sieht, daß der Spannungszustand durch zwei Gleichungen bestimmt wird, und zwar durch

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{1y} &= \gamma y \\ \sigma_{2y} &= \sigma_b \cdot e^{\operatorname{tg}\varrho\,[(2\varrho+\pi)\operatorname{tg}\varrho+2]\frac{x}{2h}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 95.$$

Um diese Zweideutigkeit zu beheben, stelle man folgende Überlegung an. Die erste Gleichung 95 wird durch die Böschung der Schutthalde und durch die Steilwand bestimmt, während die zweite von dem Spannungszustand in der Tonschicht abhängt. Solange $\sigma_{1y} < \sigma_{2y}$ ist, gilt die zweite Gleichung nicht, weil dann der Spannungszustand in der Tonschicht keinen Grenzzustand aufweist. Wird aber $\sigma_{1y} > \sigma_{2y}$, so vermag die Tonschicht diesen Druck nicht auszuhalten, und der Ton setzt sich nach dem Ausbiß zu in Bewegung. Die an der obern Sandsteinschicht entstehende Schubspannung verursacht eine nach auswärts gerichtete Kraft, deren Wert folgendermaßen bestimmt werden kann:

$$\text{Kraft} = \operatorname{tg}\rho\,\sigma_b \int_0^x e^{\operatorname{tg}\varrho\,[(2\varrho+\pi)\operatorname{tg}\varrho+2]\frac{x}{2h}} \cdot dx$$

oder

$$F = \frac{2h\,\sigma_b}{(2\rho+\pi)\operatorname{tg}\rho+2}\left[e^{\operatorname{tg}\varrho\,[(2\varrho+\pi)\operatorname{tg}\varrho+2]\frac{x}{2h}}\right]_0^x \quad 96.$$

Diese Kraft ruft Zugspannungen in den im Hangenden der Tonschicht liegenden Sandschichten hervor, die durch die Formel

$$\sigma_{Zug} = \frac{2h\,\sigma_b}{y\,[(2\rho+\pi)\operatorname{tg}\rho+2]}\left[e^{\operatorname{tg}\varrho\,[(2\varrho+\pi)\operatorname{tg}\varrho+2]\frac{x}{2h}}\right]_0^x \quad 97$$

bestimmt werden.

Wird diese Spannung größer als die Zugfestigkeit des Gesteins, so entsteht im Hangenden ein Riß, der den Spannungszustand grundsätzlich ändern muß, wie aus folgender Überlegung hervorgeht.

Die Formeln 93 sind nur dann gültig, wenn die Sandsteinbänke der erzeugten Schubspannung Widerstand leisten können. Wird die hangende Schicht mitgeschleppt, so verschwindet die Schubspannung an der obern Grenze der Tonschicht, und der Spannungszustand entspricht dem ursprünglichen Spannungszustand, der in der untern Hälfte der Tonschicht herrschte. Somit wird der neue Spannungszustand durch die Formeln 93 dargestellt, wenn man nur die Werte von φ zwischen $\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ in Betracht zieht und für h den doppelten Wert nimmt. Man erhält unmittelbar

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_b(1+\sin\rho\cos 2\varphi)\cdot \\ &\quad \cdot e^{\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos\varrho}\left[\cos 2\varphi + \frac{(2\varrho+\pi)\sin\varrho + 2\cos\varrho}{4}\frac{x}{h}\right]} \\ \sigma_y &= \sigma_b(1-\sin\rho\cos 2\varphi)\cdot \\ &\quad \cdot e^{\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos\varrho}\left[\cos 2\varphi + \frac{(2\varrho+\pi)\sin\varrho + 2\cos\varrho}{4}\frac{x}{h}\right]} \\ \tau &= \sigma_b \sin\rho\sin 2\varphi\cdot \\ &\quad \cdot e^{\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos\varrho}\left[\cos\varrho + \frac{(2\varrho+\pi)\sin\varrho + 2\cos\varrho}{4}\frac{x}{h}\right]} \end{aligned}\right\} \quad 98.$$

Jetzt ist es auch möglich, σ_{3y}, d. h. den Wert der senkrechten Spannung an der obern Grenze der Tonschicht nach erfolgtem Riß der hangenden Schichten, zu bestimmen. Er lautet

$$\sigma_{3y} = \sigma_c e^{\operatorname{tg}\varrho\,[(2\varrho+\pi)\operatorname{tg}\varrho+2]\frac{x}{4h}} \quad \ldots\ldots 99,$$

worin

$$\sigma_c = \sigma_b(1+\sin\rho)\, e^{-\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\cos\varrho}}$$

ist.

Bedenkt man jetzt, daß der Quotient der beiden Spannungen am Ausbiß

$$\frac{\sigma_b}{\sigma_c} = (1-\sin\rho)\, e^{1-\sin\varrho}$$

für Ton ($\mu = 0{,}35354$) sich wenig von der Einheit (1,1) unterscheidet, so kommt man zum Schluß, daß nach erfolgter Zerklüftung der hangenden Schichten die Oberfläche eine grundlegende Änderung erfahren muß, damit wieder Gleichgewicht eintritt.

In Abb. 37 sind für $\sigma_b \sim \sigma_c = 1$ kg/cm² $\gamma = 2$ und $h = 3$ m beide Gleichgewichtszustände schaubildlich wiedergegeben. A B C stellt die ursprüngliche Lage der Schutthalde und Steilwand dar, A D den ursprünglichen Spannungszustand des Tones und A E den Grenzzustand nach erfolgter Rißbildung. Man sieht sofort, daß der gestrichelte Teil abrutschen muß, damit die Zugspannungen im Hangenden verschwinden. Da die senkrechte Spannung in Meter Erde dargestellt wurde, so dürfte die Linie A E die natürliche Böschung der Oberfläche nach erfolgter Ruhe wiedergeben.

Entspringt oberhalb der Tonschicht eine Quelle, so sinkt die Kohäsion des Tones auf Bruchteile eines Kilogramms, so daß die Spannung am Ausbiß ausschließlich von der Mächtigkeit der Schutthalde abhängt.

Obige Überlegungen erklären die gewaltigen Bergrutsche, die durch den Abbau an steilen Abhängen ver-

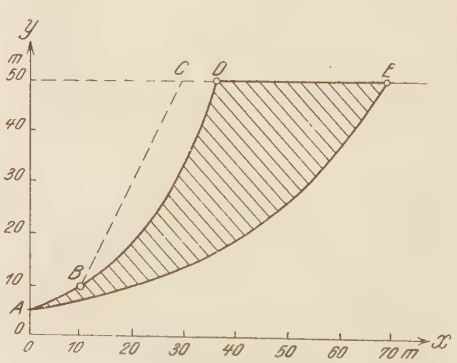

Abb. 37.

ursacht werden. Der Abbau zerklüftet die hangenden Schichten, so daß der Spannungszustand der Tonschichten eine grundlegende Veränderung erfährt und somit eine neue Böschung durch Erdrutsch geschaffen werden muß, damit die neuen Gleichgewichtsbedingungen erreicht werden. Sinngemäß lassen sich diese Überlegungen auch bei Erddämmen anwenden, wenn der Spannungszustand der hangenden Erdmassen durch die Rankineschen Formeln ausgedrückt wird, die man bekanntlich durch Einsetzen des Wertes

$$\sigma = \frac{\gamma}{\cos^2\rho}\,[y\,(1+\sin\rho\cos 2\varphi) - x\sin\rho\sin 2\varphi] \quad 100$$

in die Formeln 28 erhält (φ ist in diesem Falle eine Konstante, also unabhängig von x und y). Die Böschung des Erddammes ist eine logarithmische Kurve, die um so flacher sein muß, je geringer die Belastung am Fußdamm ($\sigma_b \sim \sigma_c$) und je kleiner der Wert des Reibungskoeffizienten der untersten Schicht wird.

Abb. 37 erklärt folgende beobachtete Tatsachen: 1. den niedrigen Böschungswinkel bei sumpfigem Untergrund, 2. die Zerstörung der Erddämme beim plötzlichen Entleeren eines Staubeckens, 3. die Unhaltbarkeit der Rankineschen Theorie bei Erddämmen mit veränderlichem Reibungskoeffizienten, 4. die gewaltigen Erdrutsche in Kohlenbergwerken, die nahe an einem Abhange gebaut werden (z. B. Lebu in Chile), 5. die eigenartige Lage der Erdschollen nach einem Bergrutsch und die niedrige Böschung nach erfolgter Ruhelage.

Schlußbetrachtungen.

Aus den vorstehenden Berechnungen geht hervor, daß die Schaffung eines Hohlraums im elastischen Gebirge bei Druckverhältnissen, die sich unterhalb der Elastizitätsgrenze befinden, eine eigenartige Veränderung des Spannungszustandes zur Folge hat. Diese ruft in bestimmten Zonen am Rande des Hohlraums beträchtliche Zugspannungen hervor, die das Gestein innerhalb einer bestimmten Grenze entspannen und die durch Beobachtung festgestellte spannungslose oder spannungsarme Zone schaffen.

Die elliptische, spannungslose Zone ist unabhängig von der Tiefe und der Form des in Betracht kommenden Hohlraumes, weil ihre Abmessungen ausschließlich von der Breite des Hohlraums und von der Poissonschen Konstante bestimmt werden. Bezeichnet man mit m die Poissonsche Konstante und mit b die Breite des Hohlraums, so wird die spannungslose Zone durch die Gleichung

$$\frac{4x^2}{(m-2)^2 b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

festgelegt.

Die Spannungen in den Hauptscheiteln dieser Ellipse verschwinden vollständig; dafür aber haben die Druckspannungen an den Nebenscheiteln den höchsten vorkommenden Wert, der durch die Gleichung

$$\sigma_{\eta\,max} = \frac{m^2}{(m-2)(m-1)}\,p$$

ausgedrückt wird, worin p die größere ursprüngliche Hauptspannung darstellt.

In plastischen Medien entsteht durch die Schaffung des Hohlraums eine spannungsarme Zone, deren Radius von den Abmessungen und der Tiefe des Hohlraums sowie von dem Wert des Reibungskoeffizienten, dem spezifischen Gewicht und dem Druck auf die Tunnelwandung abhängt.

Bei niedrigern Werten des Reibungskoeffizienten ist der Druck auf die Tunnelwandung von der Tiefe des Hohlraums abhängig; sein Wert sinkt aber, wenn genügend Material in den Hohlraum geflossen ist, auf einen geringen Bruchteil des ursprünglichen Wertes und schwankt für die in der Praxis in Betracht kommenden Tiefen zwischen 2 und 5 kg/cm². Diese Zahlen setzen voraus, daß dem Medium Gelegenheit geboten wird, den eigenartigen Spannungszustand zu erreichen, der die Gewölbebildung gestattet, was nur dann möglich ist, wenn eine bestimmte Menge des umgebenden Mittels in den Hohlraum geflossen ist und somit die notwendige Entspannung des Gebirges eingetreten ist.

Der Verfasser konnte die Beobachtung machen, daß bei druckhaftem Gebirge der Druck anfänglich groß genug sein kann, um starke Tunnelwandungen zu zerstören, daß aber dieselbe mit Rissen durchsetzte Tunnelwandung, sobald die Gewölbebildung im Medium eingetreten ist und die Feuchtigkeit des Tones den dem Drucke entsprechenden Grad erreicht hat, dem Gebirgsdruck zu widerstehen vermag, ein Beweis, daß sich endgültig nur ein geringer Druck auf die Tunnelwandung einstellt.

Bei geschichtetem Gebirge entsteht ebenfalls eine spannungsarme Zone, deren Abmessungen von der Mächtigkeit der angeschnittenen Tonschicht, dem Reibungskoeffizienten des Tones und dem Druck auf die Tunnelwandung abhängen.

Bei geringen Tiefen und geneigtem Gelände vermag die Schaffung des Hohlraums grundlegende Veränderungen im Spannungszustand des geschichteten Gebirges hervorzurufen, welche gewaltige Bergrutsche zur Folge haben können und die niedrige Neigung der natürlichen Böschung nach erfolgter Ruhe erklären.

Der eigenartige Spannungszustand des geschichteten Gebirges bei geneigter Oberfläche erklärt die bei Erddämmen beobachteten Schwierigkeiten und erlaubt, Schlüsse für den Bau von Erddämmen zu ziehen.

Zusammenfassung.

Unter der Voraussetzung, daß in einem isotropen, homogenen und elastischen Medium die Dehnungen verhältnisgleich den Spannungen sind und in einem homogenen plastischen Medium der Höchstwert der Schubspannung durch das Produkt aus Reibungszahl und Normalspannung bestimmt wird, ist eine mathematische Theorie des Gebirgsdrucks aufgestellt worden, mit deren Hilfe sich die spannungslose Zone im elastischen und die spannungsarme Zone im plastischen Medium, die bei Schaffung eines Hohlraums um denselben entstehen, erklären und beweisen lassen.

Im geschichteten Gebirge werden unter denselben Voraussetzungen das Vorhandensein einer spannungsarmen Zone um einen Hohlraum sowie die Abhängigkeit der Oberflächenneigung vom Spannungszustand der Schichten mit niedrigen Reibungszahlen erörtert und nachgewiesen.

Lebenslauf

Am 28. Oktober 1900 wurde ich als Sohn des Kaufmanns Richard Fenner in Valparaiso (Chile) geboren. Nach sechsjährigem Besuch der Deutschen Schule in Valparaiso trat ich im März 1912 in die dortige Oberrealschule ein und wurde nach Ablegung der Reifeprüfung im Jahre 1918 an der chilenischen Universität in Santiago als Studierender des Bergfaches immatrikuliert. Während der Sommerferien (Januar bis April) habe ich in den Jahren 1920, 1921 und 1922 auf verschiedenen chilenischen Gruben gearbeitet.

Gegen Ende des Jahres 1923 schloß ich mein Studium ab und erlangte nach zweijähriger Arbeit in den Kohlengruben von Lebu (Chile) am 7. Dezember 1925 den Titel eines Diplom-Bergingenieurs (Injeniero de minas de la Universidad de Chile). Bis zum Jahre 1928 habe ich die Stellung eines Betriebsingenieurs in den Kohlengruben von Lebu bekleidet, um dann meine Tätigkeit in der Kohlengrube von Lirquen als Betriebsleiter fortzusetzen. Im Jahre 1930 trat ich zur chilenischen Bergbehörde über, wurde im Jahre 1931 zum Bergassessor in Concepcion und im Jahre 1932 zum Berghauptmann in Santiago ernannt, wo ich noch heute tätig bin.

Druck von C.W. Haarfeld, Kom.-Ges., Essen.